Lösung Coulombkraft und Gravitationskraft

Für die Beträge der COULOMBkraft und der Gravitationskraft gelten allgemein die Beziehungen

$$F_\mathrm{C} = K_\mathrm{e}\,\frac{q_1\,q_2}{r^2} \qquad \text{bzw.} \qquad F_\mathrm{G} = G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}$$

1. Der Vergleich beider Kräfte bei festem Abstand ergibt zwischen

   (a) zwei Protonen ($q_1 = q_2 = e\,,\quad m_1 = m_2 = m_\mathrm{p}$)

   $$\left.\frac{F_\mathrm{C}}{F_\mathrm{G}}\right|_\mathrm{p-p} = \frac{K_\mathrm{e}e^2}{Gm_\mathrm{p}^2} = \frac{8{,}988\cdot 10^9\cdot(1{,}602\cdot 10^{-19})^2}{6{,}673\cdot 10^{-11}\cdot(1{,}673\cdot 10^{-27})^2}\,\frac{\mathrm{N\,m^2\,kg^2\,C^2}}{\mathrm{C^2\,N\,m^2\,kg^2}} = 1{,}235\cdot 10^{36}$$

   (b) zwei Elektronen ($q_1 = q_2 = e\,,\quad m_1 = m_2 = m_\mathrm{e}$)

   $$\left.\frac{F_\mathrm{C}}{F_\mathrm{G}}\right|_\mathrm{e-e} = \frac{K_\mathrm{e}e^2}{Gm_\mathrm{e}^2} = \frac{8{,}988\cdot 10^9\cdot(1{,}602\cdot 10^{-19})^2}{6{,}673\cdot 10^{-11}\cdot(9{,}110\cdot 10^{-31})^2}\,\frac{\mathrm{N\,m^2\,kg^2\,C^2}}{\mathrm{C^2\,N\,m^2\,kg^2}} = 4{,}165\cdot 10^{42}$$

   (c) einem Proton und einem Elektron (Wasserstoffatom)
   ($q_1 = q_2 = e\,,\quad m_1 = m_\mathrm{p}\,,\quad m_2 = m_\mathrm{e}$)

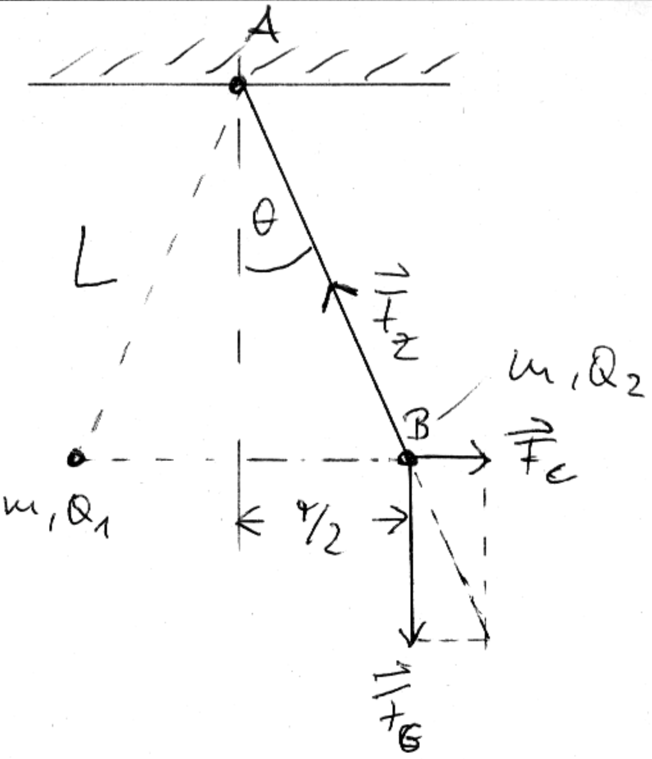
   $$\begin{aligned}\left.\frac{F_\mathrm{C}}{F_\mathrm{G}}\right|_\mathrm{p-e} = \frac{K_\mathrm{e}e^2}{Gm_\mathrm{p}m_\mathrm{e}} &= \frac{8{,}988\cdot 10^9\cdot(1{,}602\cdot 10^{-19})^2}{6{,}673\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}673\cdot 10^{-27}\cdot 9{,}110\cdot 10^{-31}}\,\frac{\mathrm{N\,m^2\,kg^2\,C^2}}{\mathrm{C^2\,N\,m^2\,kg^2}}\\ &= 2{,}268\cdot 10^{39}\end{aligned}$$

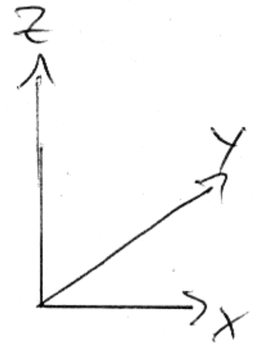
   Aus diesen Vergleichen ist ersichtlich, dass im atomaren und molekularen Bereich die Gravitationskräfte zwischen den Teilchen vollständig vernachlässigt werden knnen.

2. Im einzelnen ergeben sich für die Kräfte im Wasserstoffatom im Grundzustand die Werte

   $$\begin{aligned}F_\mathrm{C}\big|_\mathrm{H} = K_\mathrm{e}\,\tfrac{e^2}{a_0^2} &= \frac{8{,}988\cdot 10^9\cdot(1{,}602\cdot 10^{-19})^2}{(5{,}292\cdot 10^{-11})^2}\,\tfrac{\mathrm{N\,m^2\,C^2}}{\mathrm{C^2\,m^2}}\\ &= 8{,}237\cdot 10^{-8}\ \mathrm{N}\\ F_\mathrm{G}\big|_\mathrm{H} = G\,\tfrac{m_\mathrm{p}m_\mathrm{e}}{a_0^2} &= \frac{6{,}673\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}673\cdot 10^{-27}\cdot 9{,}110\cdot 10^{-31}}{(5{,}292\cdot 10^{-11})^2}\,\tfrac{\mathrm{N\,m^2\,kg^2}}{\mathrm{kg^2\,m^2}}\\ &= 3{,}632\cdot 10^{-47}\ \mathrm{N}\end{aligned}$$

Geladene (aufgehängte) Kugeln





$$\vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_C = \begin{pmatrix} F_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad F_C = k_e \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

$$\vec{F}_Z = \begin{pmatrix} -F_C \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}$$

$$\vec{\ell} = \begin{pmatrix} L \sin\theta \\ 0 \\ -L\cos\theta \end{pmatrix}$$

Bedingungen für Gleichgewicht in „B"

1) $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$

2) $\sum \vec{M}_i = \vec{0}$

Drehpunkt A:

$$\sum \vec{M}_i = \vec{l} \times \vec{F}_G + \vec{l} \times \vec{F}_C + \underbrace{\cancel{\vec{l} \times \vec{F}_Z}}_{=\vec{0}}$$

$$= \vec{l} \times (\vec{F}_G + \vec{F}_C) =$$

$$= \begin{pmatrix} L \sin\theta \\ 0 \\ -L\cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_C \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ (-L\sin\theta)(-mg) + (-L\cos\theta)\cdot F_C \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

M_y: $L(\sin\theta \, mg - \cos\theta \, F_C) = 0$ $\qquad F_C(\theta)$!

$$\text{mit } F_C = K_e \frac{Q_1 Q_2}{4L^2 \sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \sin\theta \, mg - \cos\theta \, K_e \frac{Q_1 Q_2}{4L^2 \sin^2\theta} = 0 \qquad \cdot \left| \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \right.$$

$$\underbrace{\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}}_{\sin^2\theta \cdot \tan\theta} mg - K_e \frac{Q_1 Q_2}{4L^2} = 0$$

$\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$

$$\theta^3 \, mg - K_e \frac{Q_1 Q_2}{4L^2} = 0$$

$$\theta = \sqrt[3]{\frac{K_e Q_1 Q_2}{4L^2 \dots}} \approx 7{,}4 \cdot 10^{-2}$$ $\qquad 4{,}3^\circ$

Lösung Größenordnung elektrostatischer Kräfte

Zur Bestätigung der aufgestellten Behauptung kann man davon ausgehen, dass die Masse eines Menschen durch die Masse der Nukleonen bestimmt ist. Die Masse der Elektronen kann vernachlässigt werden. Für die quantitative Abschätzung eignen sich z. B. folgende Annahmen, entweder nimmt man an, ein Mensch besteht im wesentlichen

aus Wasser mit der molaren Masse $M_{\mathrm{H_2O}} = 18\ \mathrm{kg\,kmol^{-1}}$,

oder

aus leichten Elementen, bei denen die Zahl der Protonen gleich der Zahl der Neutronen ist.

Nimmt man für die Masse eines Menschen $m_\mathrm{M} = 72$ kg an, und benutzt die erste Annahme, so ergibt sich folgende Abschätzung für die Zahl der Ladungsträger eines Vorzeichens:

$\Rightarrow$ Stoffmenge des Wassers
$$n = \frac{m_\mathrm{M}}{M_{\mathrm{H_2O}}} = \frac{72}{18}\,\frac{\mathrm{kg\,kmol}}{\mathrm{kg}} = 4\ \mathrm{kmol}$$

$\Rightarrow$ Zahl der Wassermoleküle
$$N_{\mathrm{H_2O}} = nN_\mathrm{A} = 4 \cdot 6 \cdot 10^{26}\,\frac{\mathrm{kmol}}{\mathrm{kmol}} = 2{,}4 \cdot 10^{27}$$

Jedes Wassermolekül enthält 10 Protonen und 10 Elektronen.

$$\Rightarrow \quad N_\mathrm{p} = N_\mathrm{e} = 10\,N_{\mathrm{H_2O}} = 2{,}4 \cdot 10^{28}$$

Benutzt man die andere Annahme, ergibt sich :

$$N_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\,\frac{m_\mathrm{M}}{m_\mathrm{p}} = \frac{72}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-27}} = 2{,}25 \cdot 10^{28}$$

Aus beiden Abschätzungen resultiert der gleiche Wert.

1% Überschussladung
$$\Delta Q = 0{,}01\,N_\mathrm{p} e = 2{,}4 \cdot 10^{26} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} = 4 \cdot 10^{7}\ \mathrm{C}$$

$\Rightarrow$ Kraft zwischen zwei Ladungen ΔQ im Abstand einer Armlänge von $r = 0{,}8$ m
$$F = K_\mathrm{e}\frac{(\Delta Q)^2}{r^2} = 9 \cdot 10^{9} \cdot \left(\frac{4 \cdot 10^{7}}{8 \cdot 10^{-1}}\right)^2\ \mathrm{N} = 2 \cdot 10^{25}\ \mathrm{N}$$

Masse der Erde
$$m_\mathrm{E} = 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

$\Rightarrow$ „Gewicht“ der Erde
$$G_\mathrm{E} = 6 \cdot 10^{25}\ \mathrm{N}$$

Die Behauptung ist der Größenordnung nach richtig!