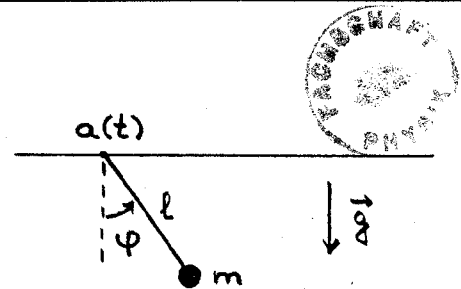


Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei ein ebenes mathematisches Pendel, dessen Aufhängepunkt eine von außen vorgegebene horizontale Bewegung $a(t)$ ausführt.



- Stellen Sie die Lagrangefunktion dieses Systems in geeigneten verallgemeinerten Koordinaten auf.
- Leiten Sie die Hamiltonfunktion H her. Unter welchen Bedingungen an $a(t)$ ist H erhalten? Ist H dann gleich der Gesamtenergie E ? Ist E für diese $a(t)$ erhalten?
- Stellen Sie die Lagrangesche Bewegungsgleichung auf. Nähern Sie diese in erster Ordnung für kleine Auslenkungen $\varphi(t)$ aus der Vertikalen.
- Lösen Sie die genäherte Gleichung aus c) für die Aufhängepunktsbewegung $a(t) = Ct^2$, $C = \text{const.}$, mit den Anfangsbedingungen $\varphi(t=0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(t=0) = 0$. Für welchen Wert von φ_0 tritt keine Schwingungsbewegung auf?

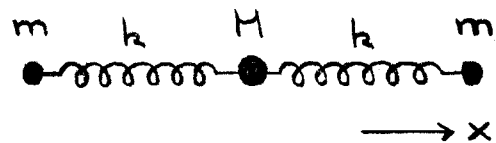
Aufgabe 2 (2 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im homogenen Erdschwerefeld \vec{g} .

Geben Sie die Lagrangefunktion in geeigneten kartesischen Koordinaten an. Berechnen Sie aus dieser mit einer Legendretransformation die Hamiltonfunktion. Welche Erhaltungssätze sind für dieses System erfüllt?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

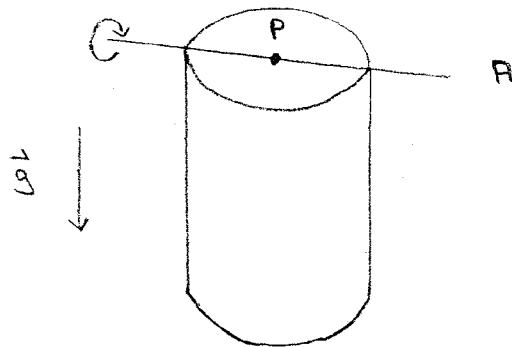
Drei Massenpunkte der Massen $m_1 = m_3 = m$ und $m_2 = M$ sind wie skizziert mit Federn der Kraftkonstanten k verbunden.



- Stellen Sie die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen für eine lineare Bewegung in x -Richtung auf. Verwenden Sie die Auslenkungen der Massenpunkte aus den Gleichgewichtslagen als verallgemeinerte Koordinaten.
- Berechnen Sie die Eigenfrequenzen dieses Systems. Begründen Sie, warum sich eine der Eigenfrequenzen zu Null ergeben muß.
- Bestimmen und diskutieren Sie die Eigenschwingungen (Skizzen). Geben Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen an.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Gegeben sei ein homogener Kreiszylinder mit Radius R , Höhe h und Dichte ϱ .



- a) Wie ist der Trägheitstensor definiert? (0,5 Punkte)
- b) Berechnen Sie den Trägheitstensor des Zylinders bezüglich eines Punktes P, der sich auf der Symmetrie-Achse im Abstand $h/2$ vom Schwerpunkt befindet. Für welches Verhältnis h/R verhält sich der Körper bezüglich P wie ein Kugelkreisel ($\theta_{xx} = \theta_{yy} = \theta_{zz}$)? (1,5 Punkte)
- c) Der Zylinder befinde sich im homogenen Schwerfeld der Erde und sei um eine Achse A durch P drehbar gelagert. Die Drehachse stehe senkrecht auf der Symmetrie-Achse des Zylinders. Stellen Sie die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichung für Drehungen um die Achse A auf, und integrieren Sie diese für kleine Bewegungen um die Ruhelage. (1 Punkt)

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Die Dynamik eines Teilchens werde durch folgende Hamiltonfunktion beschrieben:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_1 p_1 - q_2 p_2 - \alpha q_1^2 + \beta q_2^2; \quad \alpha, \beta > 0.$$

- a) Wie lauten die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen? (0,5 Punkte)
- b) Zeigen Sie, daß $F_1 := q_1 q_2$ und $F_2 := (p_1 - \alpha q_1)e^t$ Konstanten der Bewegung sind. (1 Punkt)
- c) Welche weitere Erhaltungsgröße gibt es? (0,5 Punkte)
- d) Lösen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen für die Anfangsbedingungen $q_1(0) = q_{10}, q_2(0) = q_{20}, p_1(0) = p_{10}, p_2(0) = p_{20}$. (1 Punkt)

Hinweis: Ein möglicher Lösungsweg führt über die Berechnung von \ddot{p}_1 und \ddot{p}_2 .