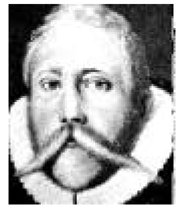
Gravitation

Massen zeihen sich gegenseitig an.

Aus astronomischen Beobachtungen der Planetenbewegungen kann das Gravitationsgesetz abgeleitet werden.

Von 1573-1601 sammelte Tycho Brahe mit bloßem Auge (ohne Fernrohr) sehr präzise Daten der Planetenbewegungen.



Tycho Brahe
1546 - 1601

Johannes Kepler hat mit Hilfe dieser Daten die Keplerschen Gesetze abgeleitet.

Kepler erkannte nicht das Gravitationsgesetz, das aus seinen Gesetzen abgeleitet werden kann.

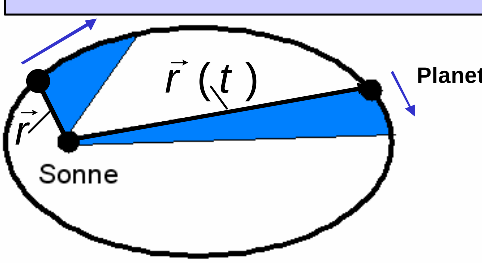
Johannes Kepler
1571-1630

Drei Keplersche Gesetze:

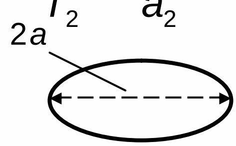
Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Die Verbindungslinie r zwischen Sonne und Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. (Flächensatz)

Die Quadrate der Umlaufzeiten T zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen a ihrer Bahnen.

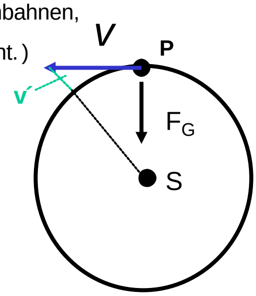


$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$



Ableitung des Gravitationsgesetzen aus Keplers 3 Gesetzen:

(1. und 2. Keplersches Gesetz: Annahme kreisförmiger Planetenbahnen, d.h. Bahngeschwindigkeiten v und v´ sind betragsmäßig konstant.)



Während der Planet sich mit v auf der Bahn bewegt, „fällt" er unter dem Einfluß der Gravitation mit der Geschwindigkeit v´ (Zentripetalbeschleunigung a´) zum Zentralgestirn, v´= a´t.

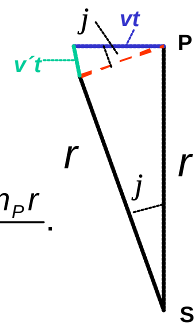
$$\sin j \approx j = \frac{vt}{r} = \frac{a´t^2}{vt}, \qquad \left(\sin j = \frac{j}{1!} - \frac{j^3}{3!} + \frac{j^5}{5!} - \ldots\right)$$

(φ im Bogenmaß)

$$v^2 t^2 = r \cdot a´t^2,$$

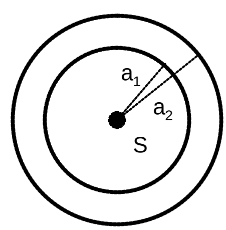
$$\boxed{a´ = \frac{v^2}{r}.}$$

Zentripetalbeschleunigung als Folge der Gravitation.



$$F_G = \frac{m_P v^2}{r}. \quad \textbf{Mit} \quad V = \frac{2p\ r}{T} \longrightarrow F_G = \frac{4p^2 m_P r}{T^2}.$$

Aus dem 3. Keplerschen Gesetz folgt:



$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \xrightarrow{\text{umformen}} \frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \text{const.}$$

mit $F_G = -F_Z$ und $(a \to r)$:

$$F_Z = \frac{4p^2 m_P r}{T^2} \xrightarrow{\text{erweitern}} \frac{-F_G \cdot r^2}{m_P} = \frac{4p^2 r^3}{T^2} = \text{const.}$$

folgt:

$$F_G = -\frac{m_P \cdot \text{const.}}{r^2} = -\frac{M_S \cdot const.'}{r^2};$$

m_P : Planetenmasse,
M_S : Sonnenmasse.

Aufgrund des Reaktionsprinzips muß die Gravitationskraft auch proportional zur Sonnenmasse sein. Also folgt:

$$\boxed{F_G = -G\frac{m_P \cdot M_S}{r^2} = \left(-G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\right).} \quad G\text{= Gravitationskonstante}$$

Ursprünglich fand Newton 1665 das Gravitationsgesetz aus folgender einfachen Abschätzung:

Isaak Newton
1643 - 1727

Ein Apfel, der vom Baum fällt, wird durch die Gravitation mit ca. 10 m/s^2 (g) beschleunigt.
Auf den Mond wirkt die Zentripetalbeschleunigung:

$$a_Z = \frac{v_{Mond}^2}{r_{Mondbahn}}.$$

$r_{Mondbahn}$: 384 400 km, (siderische) Umlaufzeit: 27,32 d, r_{Erde} = 6 378 km.

Er wird demnach mit

$$a = \frac{v^2}{r} = 0.00273 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

beschleunigt.
Der Radius der Mondbahn verhält sich zum Radius der Erde wie ≈ 60 / 1.
Die Beschleunigungen 10 m/s^2 zu 0.00273 m/s^2 verhalten sich wie ≈ 3 600 / 1

Daraus zog Newton den kühnen Schluß, daß $F \propto 1 / r^2$

Messung der Gravitationskonstanten *G*

An der Erdoberfläche wird eine Masse *m* mit der Kraft

$$F_G = -G \frac{m \cdot m_{\mathrm{Erde}}}{\mathrm{r}^2}$$

angezogen. Der Erdradius ist direkt meßbar, nicht aber die Erdmasse.
Aus einer Messung dieser Kraft kann nur das Produkt $G \cdot m_{\mathrm{Erde}}$ bestimmt werden.
Die Planetenmassen sind also nicht aus Planetenbewegungen herleitbar, da Massen der Sonne und der Planeten unbekannt ist.

Gravitationskonstante *G* ist nur meßbar, wenn beide beteiligten Massen separat ausgemessen werden können.

G ist die am wenigsten genau bekannte Naturkonstante.

G = 6.672 59 (85) • 10^{-11} m^3 / kg s^2

Versuch: Gravitationsdrehwaage nach Cavendish (**1798**) -Eötvös

Kraft zwischen den Massen m_1 und m_2

$$F_G = G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Beschleunigung:

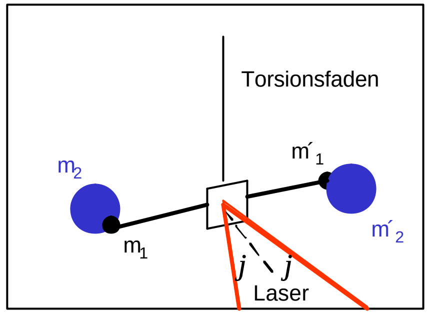
$$m_1 \cdot a \;=\; F_G \;=\; G\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

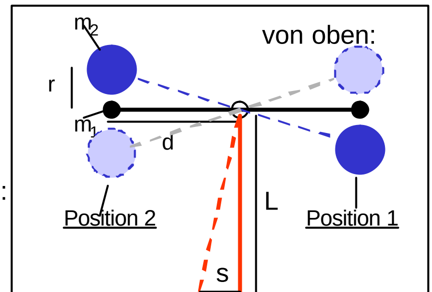
Wegen der Anfangsstellung von m_2 gegenüber m_1 :

$$a = 2 \cdot G\,\frac{m_2}{r^2}$$

Ablesen mit Laserzeiger (doppelter Winkel):

$$\frac{\Delta r}{d} = \frac{1}{2}\frac{s}{L}$$





Beschleunigte Bewegung:

$$\Delta r(t) = c \cdot t^2 \qquad\qquad c = \text{const.}$$

Berechnung der Geschwindigkeit *v(t)*

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = c \cdot 2t$$

Berechnung der Beschleunigung *a(t)*

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = c \cdot 2$$

Nach dem Zeitintervall T hat sich die Masse m_1 um die Strecke Δr bewegt.

$$\Delta r = \frac{a}{2} \cdot T^2$$

Auswertung des Experimentes:

$$\Delta r = \frac{a}{2} \cdot T^2 \longrightarrow a = \frac{2\Delta r}{T^2}$$

$$\frac{\Delta r}{d} = \frac{1}{2}\frac{s}{L} \longrightarrow \Delta r = \frac{1}{2}\frac{d}{L}s$$

Einsetzen ergibt:

$$a = \frac{d\,s}{T^2 L}$$

durch Gleichsetzen mit

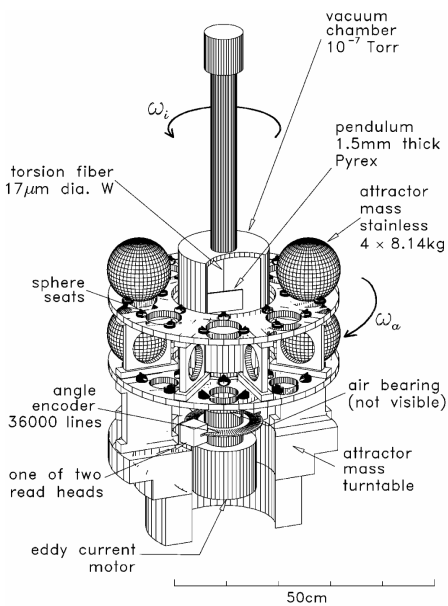
$$a = 2 \cdot G\,\frac{m_2}{r^2}$$

folgt

$$G = \frac{d\,s\,r^2}{2\,m_2 T^2 L}$$

m_2	=	1.5 kg	± 1%
r	=	0.048 m	± 10%
d	=	0.05 m	± 5%
L	=	17,6 m	
s	=		
T	=		
G	=		

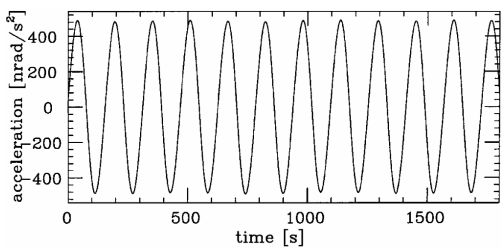
<u>Aktuelles Experiment:</u> Meßwert $G = (6.6742 \pm 0.0001)\,10^{-11}$ m³ / kg s

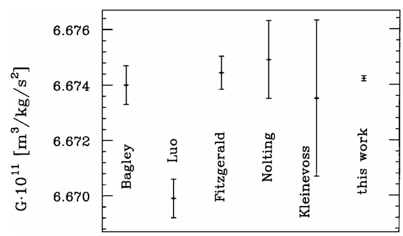


J.H.Gundlach et. al, Phys. Rev. Lett. 85, 2869 (2000)

Verspiegelte Glasplatte dreht sich zwischen vier Massen (8,14 kg ± 3mg)
Die Massen sind auf einem Drehtisch befestigt, der sich mit konst. ω_a dreht.
Genaue Position der Glasplatte als Funktion von der Zeit wird gemessen.
Daraus wird Beschleunigung berechnet.

Größte Ungenauigkeit ist die Präzision der Massenanordnung (± 1µm)





Messungen seit 1995

An der Erdoberfläche, d.h. im Alltagsleben, wird jede Masse im wesentlichen durch die Erde angezogen. → Erdanziehungskraft

Messung der Erdanziehungskraft:

Kraftmessung über Messung der Beschleunigung einer Probemasse

Fallversuch:

$$F_G = G\,\frac{m \cdot m_{\text{Erde}}}{r^2} = m \cdot a$$

m kürzt sich heraus, d.h. alle Probemassen fallen gleich schnell. → Versuch

Ergibt die s.g. Fallbeschleunigung:

$$a = G\,\frac{m_{\text{Erde}}}{r^2}$$

Das Kürzen von m setzt etwas Grundlegendes voraus:

Träge Masse = Schwere Masse

Experimentelle Bestätigung mit rel. Genauigkeit < 10^{-11}

Messung der Fallbeschleunigung:

z.B. Messung der Fallzeit: (gleichmäßig beschleunigte Bewegung)

$$x(t) = \frac{a}{2} t^2$$

daraus Bestimmung von *a*. Erdbeschleunigung wird üblicherweise mit *g* abgekürzt. Mittlerer Wert: $g = 9.81$ m/ s^2

Demonstrationsversuch z.B. mit Fadenpendel → wird später gezeigt (siehe Abschnitt: Schwingungen)

Präzisionsmessung mit Gravimeter:

Absolutbestimmung von *g* mit Fallversuch.

Ortsmessung *x(t)* wird mit Laserinterferometer und Atomuhr durchgeführt.

Auszählen der Interferenzringe als Funktion von der Zeit während des Fallens.

Zurückführung auf Ort- und Zeitmessung ergibt hohe Genauigkeit.

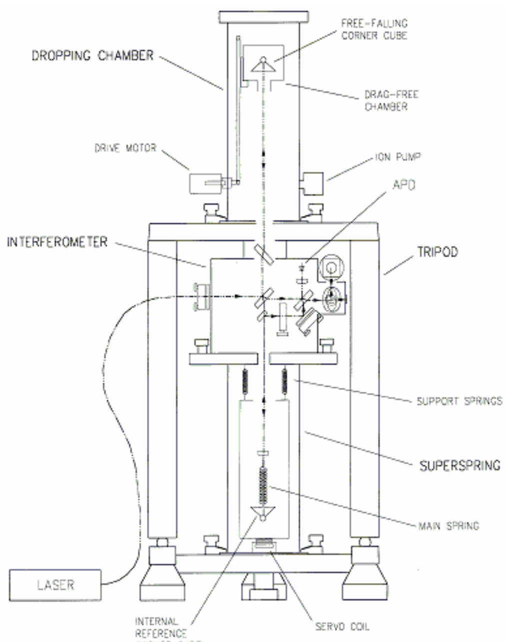
Relativer Fehler: 10^{-9}

Absolutes Gravimeter:

Fallversuch im Hochvakuum

Jod-stabilisierter HeNe-Laser

Rubidium-Atomuhr



Beispiele für Variation der Fallbeschleunigung

Hamburg Flughafen: 9.8139443 m/s^2
Hannover Flughafen: 9.8128745 m/s^2
München Flughafen: 9.8072914 m/s^2
Rom Flughafen: 9.8034255 m/s^2

Fallbeschleunigung wird beeinflußt durch: Erdabplattung, Zentrifugalbeschleunigung durch Erddrehung, Ebbe und Flut, Geologische Gegebenheiten
Anwendung: z.B. Suche nach Öl, Erforschung von Magmafluß in Vulkanen

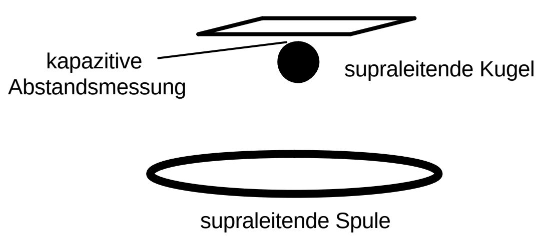
Berechnung der Erdmasse aus der Fallbeschleunigung

Bei kugelsymmetrischen Massen darf mit Punktmasse im Mittelpunkt gerechnet werden. (Mathematischer Beweis wird hier nicht gezeigt.)
Erdradius: 6378 km (Äquator)

$$a = G \frac{m_{\text{Erde}}}{r^2_{Erde}} \longrightarrow m_{\text{Erde}} = \frac{a\, r^2_{Erde}}{G}.$$

$\rightarrow$ Erdmasse: 5.98 10^{24} kg

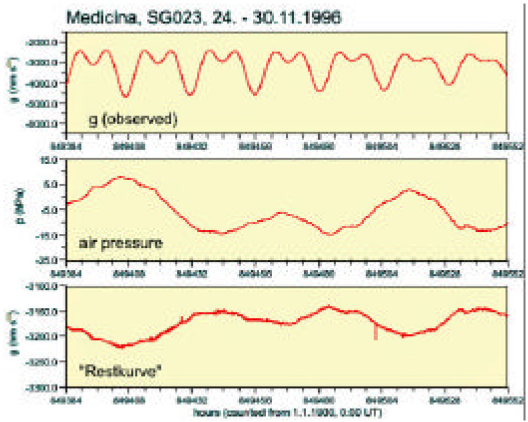
Relative Gravimeter



Supraleitende Kugel schwebt über supraleitender Spule
Abstoßendes Magnetfeld (Meißner-Ochsenfeld-Effekt)
Elektrische Ströme sehr konstant (ändern sich unmerklich in 100 000 Jahren)
Abstoßende Kraft viel konstanter als Erdanziehungskraft.
Kraftänderungen ändern die Position der schwebenden Kugel um wenige nm.
Relative Empfindlichkeit für g: 10^{-11}

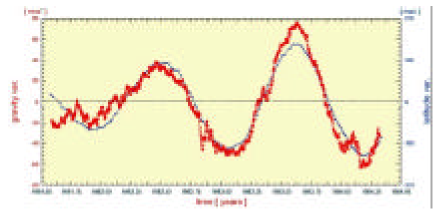
Schwankungen von *g*

Gezeiten (Ebbe und Flut)
Gravitation von Mond und Sonne



Gravitationswirkung der
Atmosphäre

Schwankungen der
Erdrotationsachse über 3 Jahre
(Variation der Zentrifugalkraft)



Präzise Kraftmessungen

Bei bekannter Erdbeschleunigung übt eine bekannte Probemasse eine sehr genau berechenbare Gewichtskraft aus.

Kraftmesser können mit solchen Gewichtsstücken geeicht werden.

Versuch (M16): Kräftemessung

Auswertung des Experimentes:

$$\Delta r = \frac{a}{2} \cdot T^2 \longrightarrow a = \frac{2\Delta r}{T^2}$$

$$\frac{\Delta r}{d} = \frac{1}{2}\frac{s}{L} \longrightarrow \Delta r = \frac{1}{2}\frac{d}{L}s$$

Einsetzen ergibt:

$$a = \frac{d\,s}{T^2 L}$$

durch Gleichsetzen mit

$$a = 2 \cdot G\,\frac{m_2}{r^2}$$

folgt

$$G = \frac{d\,s\,r^2}{2\,m_2 T^2 L}$$

m_2	=	1.5 kg	± 1%
r	=	0.048 m	± 10%
d	=	0.05 m	± 5%
L	=	17,6 m	
s	=	0,30 m	
T	=	105 s	

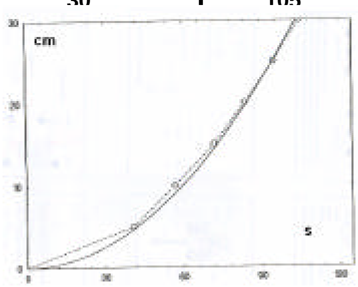
G_{expt} = 5,94 · 10^{-11} m^3/ kg s^2

(Derzeit gültiger Wert:
G = 6,6726.. · 10^{-11} m^3/ kg s^2)

Genauere Auswertung des Experiments mit der Drehwaage:

Ablenkung s (cm)	Zeit T (s)
0	0
5	41
10	57
15	72
20	84
25	95
30	105

s



T

Aus: $$G = \frac{d\,s\,r^2}{2m_2 T^2 L}$$ folgt:

$$s = G\,\frac{2m_2 L}{d\,r^2} \cdot T^2 = a \cdot T^2.$$

Fitergebnis:

$$a = 2{,}785 \cdot 10^{-5}\,\frac{m}{s^2}.$$

Daraus:

$$\boxed{G = 6{,}076 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2}.}$$