Mehrdimensionale Bewegungen

Ortsangabe in 3 Dimensionen

Zur Angabe eines Ortes im Raum sind 3 Größen erforderlich.

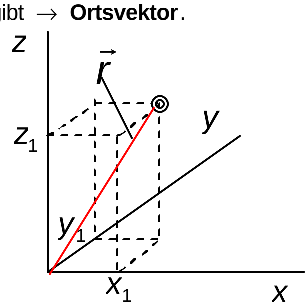
Angabe in einem kartesischem Koordinatensystem: x_1, y_1, z_1

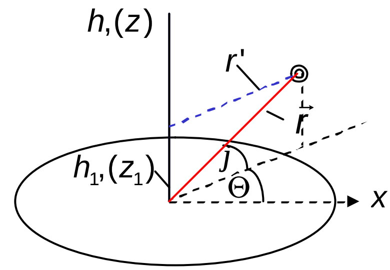
(Angabe der Abstände vom Ursprung des Koordinatensystems in den drei Raumrichtungen.)

Auch möglich: Angabe vom Abstand r und zwei Winkeln Θ, j $\rightarrow$ Kugelkoordinaten,

Zylinderkoordinaten: Ein Winkel Θ in der Ebene, Höhe h_1 (oder z_1), Abstand r'.

Zusammengefaßt sind diese Zahlen ein **Vektor**, der den Ort eindeutig angibt $\rightarrow$ **Ortsvektor**.





Übergang vom kartesischen zu anderen Koordinatensystemen

Kartesisches System ——— Kugelkoordinaten:

$$x = r \cdot \cos j \ \cos q; \quad y = r \cdot \cos j \ \sin q; \quad z = r \cdot \sin j .$$

$$r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}, \quad \tan q = \frac{y}{x}, \quad \tan j = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin j = \frac{z}{r}.$$

Kartesisches System ——— Zylinderkoordinaten:

$$r' = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \tan q = \frac{y}{r'}. \quad x = r' \cos q; \quad y = r' \sin q.$$

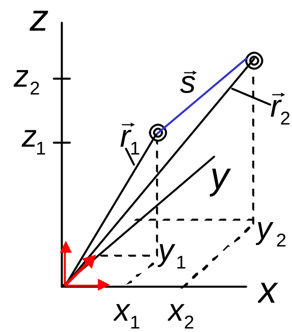
$$z = z'.$$

Vektoren, Schreibweise:

$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ oder $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ x_1, y_1, z_1: Skalare

oder $\vec{r}_1 = x_1 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y + z_1 \cdot \vec{e}_z$

mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$; $|e_i| = 1$.



Verschiebung von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$:

Die Verschiebung ist eine gerichtete Größe.

Darstellung als Pfeil.

Alle gerichteten Größen werden in der Physik durch Vektoren ausgedrückt.

In kartesischen Koordinaten:

Die Verschiebung $\vec{s}$ berechnet sich als Differenz der Ortsvektoren:

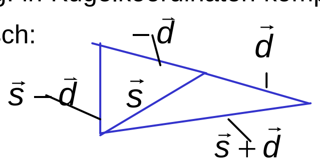
$\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

Zwei Verschiebungen (Vektoren) addieren sich komponentenweise

$$\vec{s} + \vec{d} = (s_x, s_y, s_z) + (d_x, d_y, d_z) = (s_x + d_x, s_y + d_y, s_z + d_z)$$

Achtung: in Kugelkoordinaten komplizierter.

Graphisch:



Vektoraddition

Geschwindigkeit:

In einer Dimension war $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} x(t)$.

Geschwindigkeit ist eine gerichtete Größe.

In drei Dimensionen ist die Geschwindigkeit eines Massepunktes die Ableitung seines Ortsvektors nach der Zeit.

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \frac{d}{dt}\big(x(t), y(t), z(t)\big) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (v_x, v_y, v_z).$$

Anders ausgedrückt: Für jede Koordinate gilt unabhängig voneinander:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \qquad v_y = \frac{dy}{dt}; \qquad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

<u>Beschleunigung</u>

Auch Beschleunigung $\vec{a}$ ist eine gerichtete Größe.

Vorgehen ebenso wie bei Geschwindigkeit: $\vec{a} =$

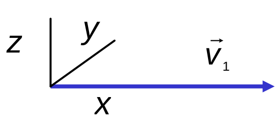
$$\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\left(v_x(t), v_y(t), v_z(t)\right) = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right) = (a_x, a_y, a_z).$$

Zur Berechnung der Komponenten des Beschleunigungsvektors bildet man die Ableitungen der Komponenten der Geschwindigkeit nach der Zeit:

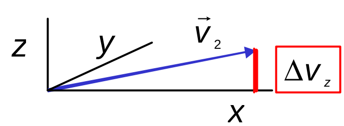
$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \qquad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \qquad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$$

<u>Beispiele für Beschleunigungen</u>

vorher



nachher

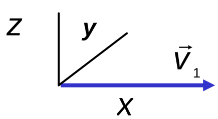


$\vec{v}_1 = (v_x, 0, 0)$ $\qquad$ $\vec{v}_2 = (v_x, 0, \Delta v_z)$

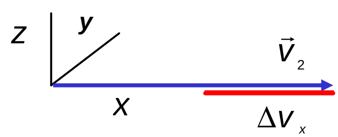
Änderung der Geschwindigkeit nur in z-Richtung:

$$\vec{a} = (0,0,a_z) \approx (0,0,\frac{\Delta v_z}{\Delta t})$$

vorher



nachher



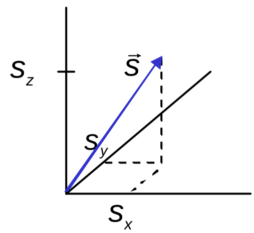
$v_1 = (v_x, 0, 0)$ $\qquad$ $v_2 = (v_x + \Delta v_x, 0, 0)$

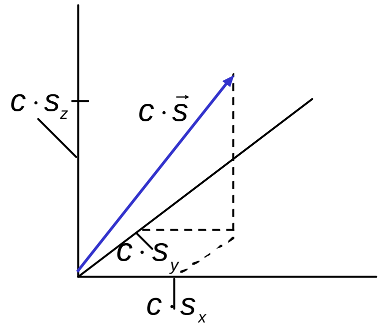
Änderung nur in x-Richtung $\rightarrow \vec{a} = (a_x, 0, 0) \approx \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, 0, 0\right)$

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl (Skalar):

$$c \cdot \vec{s} = c \cdot (s_x, s_y, s_z) = (cs_x, cs_y, cs_z)$$

Beispiel Verschiebung $\vec{s}$:





Multiplikation mit Skalar ändert den Betrag des Vektors, aber nicht die Richtung

Betrag eines Vektors (in kartesischen Koordinaten):

$$|\vec{s}\,| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}$$

Newtons Aktionsprinzip in drei Dimensionen:

$$\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.}$$

Auch Kräfte sind Vektoren, d.h. sie sind gerichtet.

Die Beschleunigung einer Masse erfolgt in Richtung der wirkenden Kraft.

Die Masse ist ein Skalar, sie hat keine Richtung.

Zerlegung der Kraft in die drei Raumkomponenten:

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = m \cdot (a_x, a_y, a_z) = (m \cdot a_x, m \cdot a_y, m \cdot a_z)$$

Das Gesetz zerfällt in drei voneinander unabhängige Gleichungen:

$$F_x = m \cdot a_x = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}, \quad F_y = m \cdot a_y = \ldots, \quad F_z = m \cdot a_z = \ldots;$$

Die Bewegungen in den 3 Richtungen erfolgen unabhängig voneinander.

Einfügung über Differentialgleichungen (Dgl.en)

Das Newtonsche Prinzip $\vec{F} = m \cdot \ddot{\vec{r}}$ ist ein Beispiel für ein Naturgesetz in Form einer Differentialgleichung.

Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung zwischen gesuchten Funktionen einer oder mehrer Veränderlicher und den Ableitungen der gesuchten Funktionen nach den unabhängigen Veränderlichen. Hängen die gesuchten Funktionen nur von einer unabhängigen Veränderlichen ab, so liegt eine *gewöhnliche Dgl.* vor, bei mehreren Veränderlichen spricht man von einer *partiellen Dgl.*

Beisp. für eine gew., lineare Dgl. 2. Ordnung (= Grad n der höchsten Ableitung):

Dgl. des eindimensionalen gedämpften Federpendels (Masse m, Federkonstante D, Dämpfungskonstante l)

$$\ddot{x}(t) + l \cdot \dot{x}(t) + \frac{D}{m} \cdot x(t) = 0 \,.$$

Um aus der Vielzahl der möglichen Funktionen x(t), die diese Gleichung lösen, die für das vorliegende physikalische System zutreffenden Lösungen auszusondern, sind n zusätzliche Rand- und Anfangsbedingungen anzugeben, die das Problem näher beschreiben, z. B.

$x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = \dot{x}(t=0) = v_0;$ **(2 Anfangsbedingungen o. Randbed.)**

Einfügung über Differentialgleichungen (Fortsetzung)

Beispiel für eine partielle Dgl. zweiter Ordnung:

Schrödinger-Gleichung des H-Atoms: **(zeitunabhängig)**

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y_n}{\partial z^2}\right) - \frac{e^2}{4pe_0 r} y_n = E_n y_n; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$y_n(x,y,z)$: **ges. Lösungsfunktion, (n. Wellenfunkt. des Elektrons im H-Atom, Wahrscheinlichkeitsamplitude)**

E_n : **Energie des Elektrons der Masse m im Zustand n, e_0:Vakuum-Dielektrizitätskonstante, r: Abstand des Elektrons vom Kern.**

Randbedingungen:

1. Wahrscheinlichkeitsamplitude y muß für r ® ¥ proportional zu $e^{(-ar)}$ verschwinden, damit die Gesamtwahrscheinlichkeit |y ²| = 1 wird.
2. Das Elektron kann nicht gleichzeitig im Zustand y_n und in y_m sein.
Zwei Bedingungen zusammengefaßt in der Orthonormierungsbedingung:

$$\int_0^\infty y_n(r) \cdot y_m(r) d^3 r = d_{n,m} = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \neq m \end{cases}$$ **d: Kroneckersymbol.**

Anwendungen: Schräger Wurf:

$\vec{F} = (0, 0, -mg),$

Anfangsbedingungen können vorgegeben werden: $v_x, v_y, v_z(t=0);$ $x, y, z(t=0).$

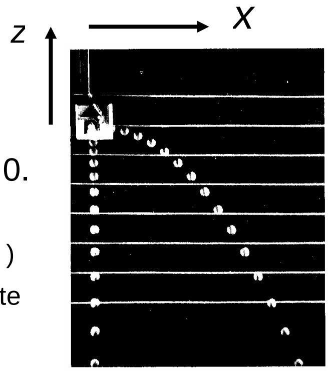
Konstante Kraft in negativer z-Richtung

Mit dem Aktionsprinzip folgt:

$$\vec{F} = (0, 0, -mg) = (0, 0, -ma_z)$$

also

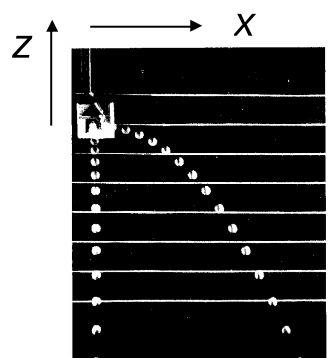
$$\vec{a} = (0, 0, -g)$$



Beispielsweise: $v_x = v_0; \quad x_0 = y_0 = z_0 = 0.$

Zerlegung der Bewegung in eine gerad-
linig gleichförmige horizontale Bewegung (v_0)
und eine gleichförmig beschleunigte senkrechte
Bewegung.

Schräger Wurf:



$\vec{F} = (0, 0, -mg)$, Dgl.: $\ddot{s}_z = -g.$

Lösung der Dgl. durch zweifache Integration:

1. Integration:

$$\dot{\vec{s}}(t) = \vec{v} = -g\, t \cdot \vec{e}_z + v_0 \cdot \vec{e}_x$$

2. Integration:

1. Integrationskonstante

$$\vec{s}(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \cdot \vec{e}_z + v_0 t \cdot \vec{e}_x + \left(x_0 \cdot \vec{e}_x + y_0 \cdot \vec{e}_y + z_0 \cdot \vec{e}_z = 0\right)$$

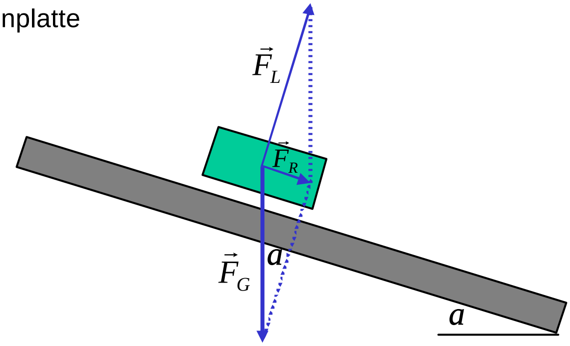
(Parameter-Darstellung einer Parabel)

2. Integrationskonstanten

Elimination des Parameters t:

$$z = -\frac{1}{2} g t^2; \quad x = v_0 t; \quad \longrightarrow \quad z = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2.$$

Versuch: geneigte Luftkissenplatte



Die Gewichtskraft ist

$$\vec{F}_G = (0, 0, -mg).$$

Die Kraft F_L ist immer senkrecht zur Platte gerichtet.

Sie kompensiert die Komponente der Gewichtskraft in dieser Richtung.

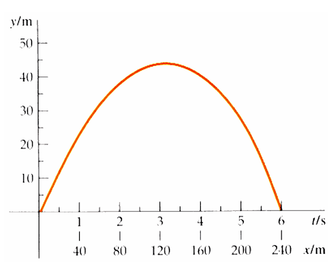
d.h. keine Beschleunigung senkrecht zur Platte.

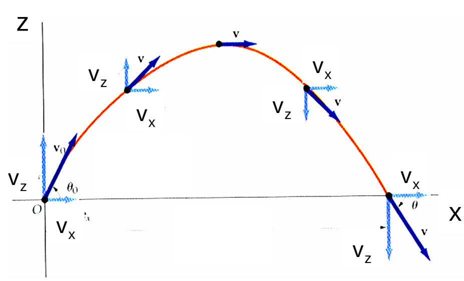
Aus der resultierenden Kraft ergibt sich Beschleunigung entlang der Platte.

Aus der Zeichnung liest man ab:

$$\left|\vec{F}_R\right| = m\ g\ \sin a\ .$$

Wurfparabel (Versuch: Puck auf Luftkissentisch)





Die Geschwindigkeitskomponente v_x bleibt gleich

Die Geschwindigkeitskomponente v_z ändert sich aufgrund der Beschleunigung

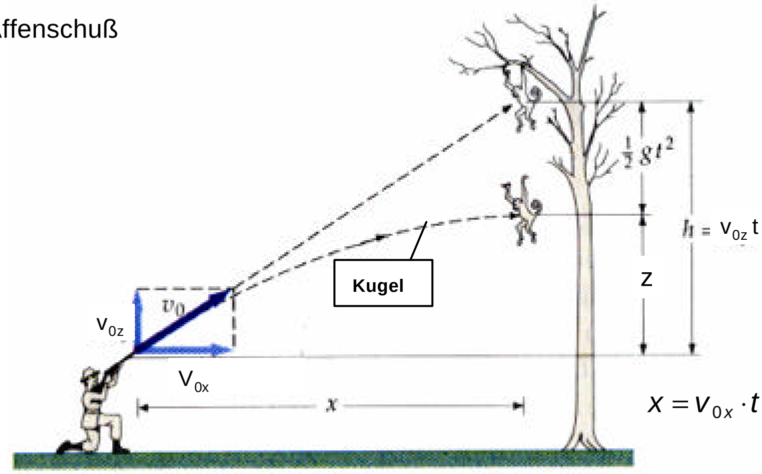
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$$\vec{v}(t) = (v_{0x}, 0, v_{0z}) + (0, 0, -g) \cdot t$$

In Komponenten:

$$v_x(t) = v_{0x}, \qquad v_y(t) = 0, \qquad v_z(t) = v_{0z} - g \cdot t$$

Versuch: Affenschuß



Im Moment des Abschusses läßt der Affe sich fallen.

Die senkrechte Bewegung (Fallbeschleunigung) von Affe und Kugel sind gleich.

Unabhängig davon hat die Kugel eine Horizontalgeschwindigkeit, der Affe nicht.

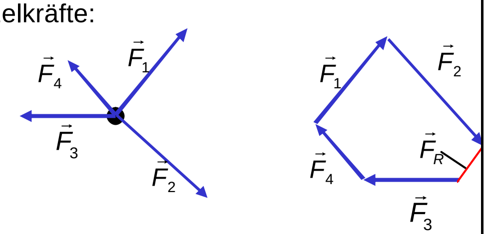
Daher Treffer, wenn direkt auf den Affen gezielt wird.

Addition von Kräften:

Greifen an einer Masse mehrere Kräfte an, so ergibt sich die resultierende Kraft aus der Vektorsumme der Einzelkräfte:

Die vektorielle Summe der Kräfte ist:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_R$$



Im Spezialfall $\vec{F}_R = 0$

verharrt die Masse in Ruhe oder in geradlinig gleichförmiger Bewegung.

→Reaktionsprinzip in drei Dimensionen. Wichtiges Prinzip in der Statik.

Verbleibt eine resultierende Kraft $\vec{F}_R$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_R = m \cdot \vec{a},$$

dann beschleunigt diese die Masse.