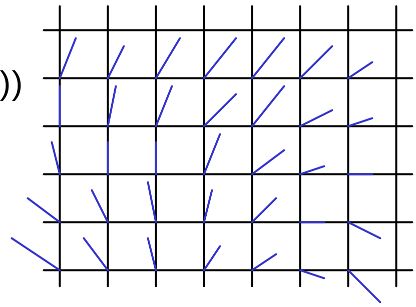
Kraftfelder

Die Kraft auf eine Masse kann an verschiedenen Orten unterschiedlich sein. Zur vollständigen Angabe muss für jeden Ort $\vec{r} = (x, y, z)$ der Kraftvektor $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ angegeben werden. $\rightarrow$ Kraftfeld. Kraftlinien verlaufen so, daß in jedem Punkt $\vec{r}$ die Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ die Richtung der Tangente an die Kraftlinie hat.

Grafische Darstellung



Schreibweise:

$$\vec{F}(\vec{r}) = (F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z))$$

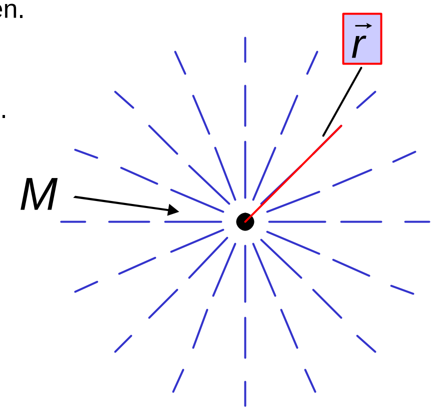
Kraftfelder sind etwas Reales.
In einem Gravitationsfeld bzw. einem elektromagnetischen Feld ist Energie gespeichert.

Mit dem Aktionsprinzip kann man die Beschleunigung einer Masse am Ort $\vec{r}$ in einem Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ direkt berechnen.

Gravitationsfeld

Es wird die Kraft auf eine kleine Masse *m* in der Nähe der Masse *M* gemessen.

Die Richtung der Kraft zeigt auf Masse *M,* d.h. in Richtung von $-\vec{r}$.



Der Betrag der Kraft ist

$$F_G = G\,\frac{m \cdot M}{r^2}$$

Also

$$\vec{F}_G = -G\,\frac{m \cdot M}{|\vec{r}|^2}\,\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

oder

$$\vec{F}_G = -G\,\frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

Kraftfelder können zusätzlich auch von der Zeit abhängen:

$$\vec{F}(\vec{r},t).$$

Dies ist der Fall, wenn sich die felderzeugenden Massen gegeneinander bewegen.

Man kann kein Kraftfeld definieren, wenn die Kräfte auch von der Geschwindigkeit der Probemasse abhängen, z.B. Reibungskräfte.
Die Kraft

$$\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$$

hängt dann explizit von der momentanen Bewegung der Probemasse ab.

Um das Feld unabhängig von der Masse m des Probekörpers zu machen, führt man eine Feldstärke ein.

$$\boxed{\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m} = -G\frac{M}{|\vec{r}|^2}\vec{e}_r\,.}$$

Wegen der Gleichheit „Träge Masse = schwere Masse“ ist die Feldstärke des Gravitationsfeldes eine Beschleunigung (= Schwerebeschleunigung). Denn es gilt:

$$\vec{F}(\vec{r}) = m\cdot\vec{g}(\vec{r})$$

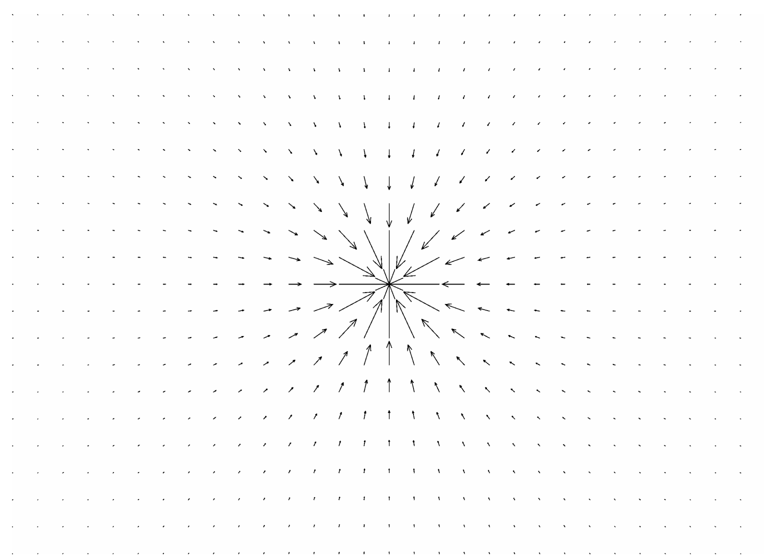
$$m\cdot\vec{a} = m\cdot\vec{g}(\vec{r})$$

Aus dieser Beziehung ist ersichtlich, daß für alle Körper im Schwerefeld die gleiche Beschleunigung $\vec{g}$ gilt, unabhängig von ihrer Masse:

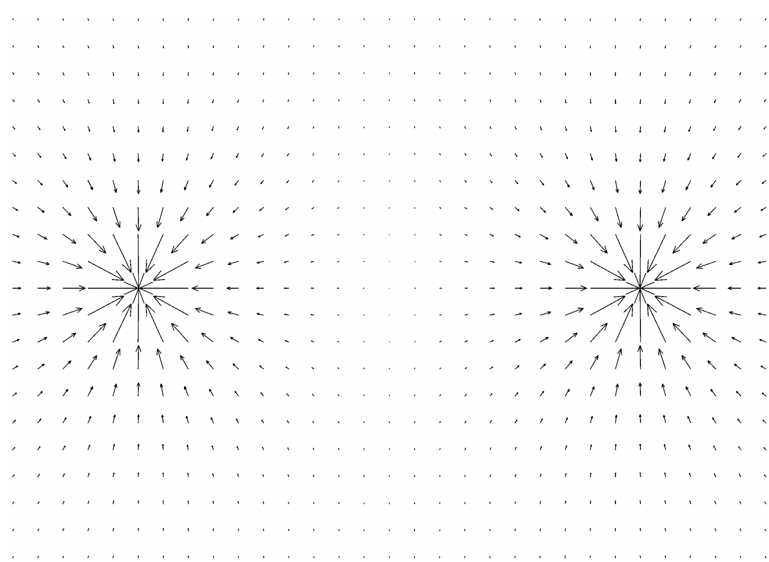
„Alle Massen fallen gleich schnell“

Beispiele:

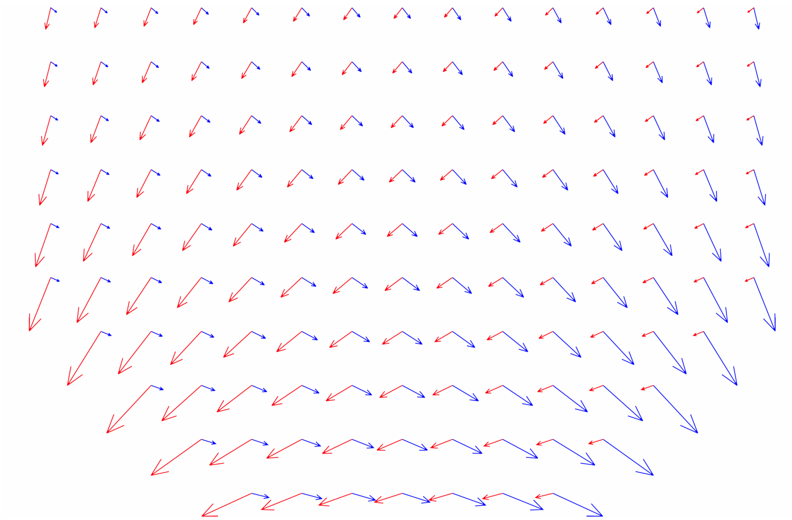
Feld einer Punktmasse



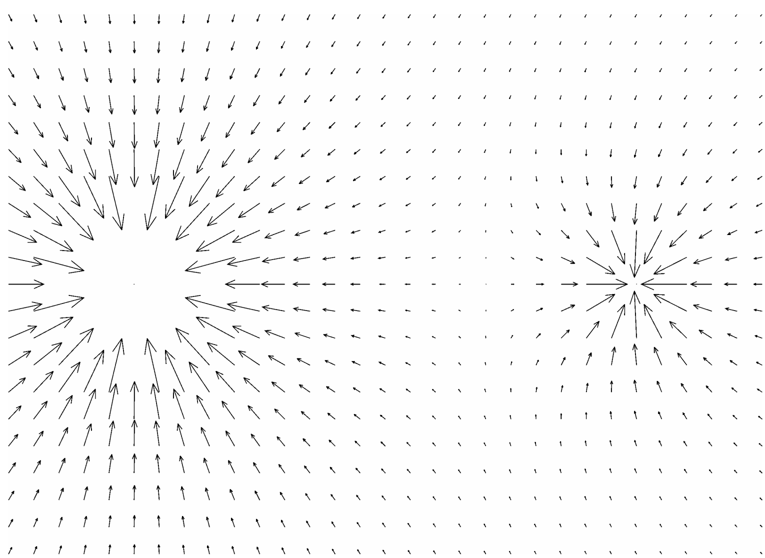
Feld von zwei gleichgroßen Punktmassen



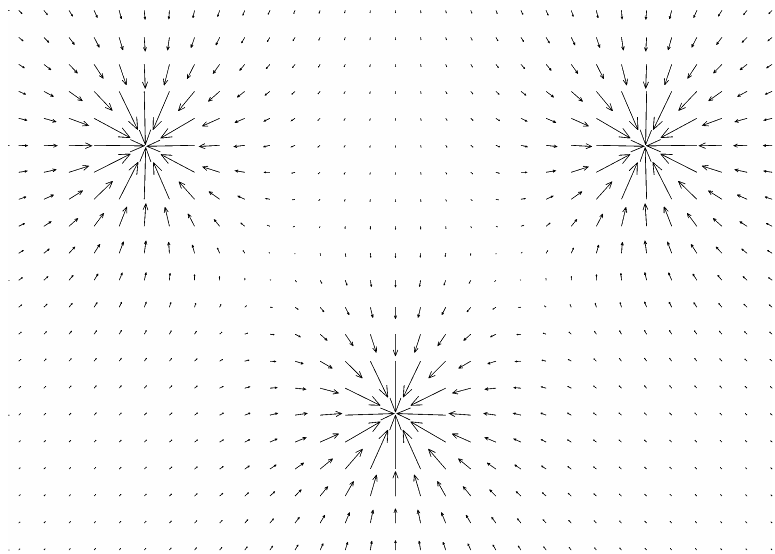
Ausschnitt mit Zerlegung der Kräfte (Feldstärke) in ihre Komponenten



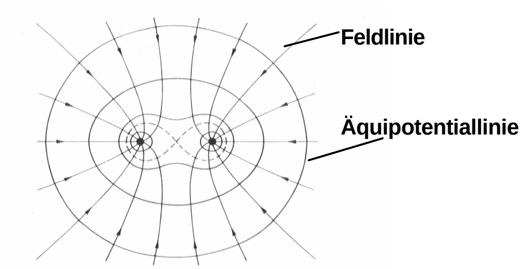
Feld von zwei Punktmassen $m_1/m_2 = 5/1$



Feld von drei gleichgroßen Punktmassen



Zur graphischen Darstellung von Feldern: <u>Feldlinien</u>



Jede Feldlinie beginnt im Unendlichen und endet an einer Masse.

Die Richtung der Feldlinie stimmt an jedem Punkt mit der Richtung der Kraft auf eine Probemasse überein.

Die Dichte der Feldlinien pro Flächeneinheit (bei senkrechtem Durchstoßen) ist proportional zum Betrag der Kraft. Feldlinien stehen senkrecht auf den Äquipotentiallinien.

Bewegung einer Masse in einem Kraftfeld

Newton's Aktionsprinzip lautet in diesem Fall:

$$\vec{F}(\vec{r}) = m \cdot \vec{a}(\vec{r})$$

Die Beschleunigung hängt vom Ort ab, an dem sich die Masse befindet.

Newton's Aktionsprinzip liefert eine Anleitung, um die Bewegung der Masse durch das Kraftfeld zu berechnen:

Ausgehend vom Startpunkt $\vec{r}_0$ mit Startgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ wird in jedem Moment folgendes berechnet:

- aus der Kraft die Beschleunigung = Änderung der Geschwindigkeit,
- daraus die neue Geschwindigkeit = Änderung des Ortsvektors,
- daraus der neue Ort.

Aus dem Aktionsprinzip erhält man eine Differentialgleichung, die Bewegungsgleichung.
Wir schreiben um

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}(\vec{r})$$

mit $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ ergibt sich

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m}$$

Diese Differentialgleichung hat als Lösung Funktionen $\vec{r}(t)$.

Lösung sind alle möglichen Bewegungen in dem Kraftfeld, d.h. alle zulässigen Funktionen $\vec{r}(t)$.

Angabe von Anfangsbedingungen für Ort und Geschwindigkeit beschränkt die Lösung auf eine bestimmte Bewegung.

Beschreibung und Vorhersage der Bewegungen von Massen.

Beschreibung des Experimentes mittels eines Modells.

- Zusammenstellen aller Kräfte, die auf bewegliche Massen wirken.
- Aufstellen der Bewegungsgleichung.
- Lösen der Bewegungsgleichung.
- Feststellen der Anfangsbedingungen.
- Berechnung der Bahnkurven zu diesen Anfangsbedingungen.
- Vergleich mit dem Experiment.
- Bestätigung bzw. Korrektur des Modells.

Die Bewegungsgleichung d.h. die Differentialgleichung kann numerisch oder in bestimmten Fällen analytisch gelöst werden.

Einfache numerische Lösung:
Ausgehend vom Startpunkt $\vec{r}_0$ mit Startgeschwindigkeit $\vec{v}_0$
wird in jedem Moment folgendes berechnet:

- aus der Kraft die Beschleunigung = Änderung der Geschwindigkeit,
- daraus die neue Geschwindigkeit = Änderung des Ortsvektors,
- daraus der neue Ort:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m} \qquad \rightarrow \qquad \dot{\vec{v}} = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m} = \vec{a}.$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}$$

$$\vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v} + \vec{a}\cdot\Delta t \qquad \text{d.h.} \qquad \vec{v}_{neu} = \vec{v}_{alt} + \vec{a}\cdot\Delta t,$$

$$\vec{r}(t+\Delta t) = \vec{r} + \vec{v}\cdot\Delta t \qquad \text{d.h.} \qquad \vec{r}_{neu} = \vec{r}_{alt} + \vec{v}_{alt}\cdot\Delta t.$$

Die Beschleunigung berechnet sich aus der Kraft, also:

$$\vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v} + \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m}\cdot\Delta t \qquad \text{d.h.} \qquad \vec{v}_{neu} = \vec{v}_{alt} + \frac{\vec{F}(\vec{r}_{alt})}{m}\cdot\Delta t$$

Komponentenweise ergibt sich:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v_x(t)\cdot\Delta t$$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + v_y(t)\cdot\Delta t$$

$$z(t+\Delta t) = z(t) + v_z(t)\cdot\Delta t$$

$$v_x(t+\Delta t) = v_x(t) + \frac{F_x(x,y,z)}{m}\cdot\Delta t$$

$$v_y(t+\Delta t) = v_y(t) + \frac{F_y(x,y,z)}{m}\cdot\Delta t$$

$$v_z(t+\Delta t) = v_z(t) + \frac{F_z(x,y,z)}{m}\cdot\Delta t$$

Anfangsbedingung:

$$x(0) = x_0$$

$$y(0) = y_0$$

$$z(0) = z_0$$

$$v_x(0) = v_{x0}$$

$$v_y(0) = v_{y0}$$

$$v_z(0) = v_{z0}$$

Beispiel: Bewegung der Erde um die Sonne (Sonne selbst sei ortsfest)

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G\,\frac{m_S\cdot m_E}{\mathrm{r}^2}\,\frac{\vec{r}}{r}$$

Komponentenweise ergibt sich:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v_x(t)\cdot\Delta t$$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + v_y(t)\cdot\Delta t$$

$$z(t+\Delta t) = z(t) + v_z(t)\cdot\Delta t$$

$$v_x(t+\Delta t) = v_x(t) \;-\; G\,\frac{m_S}{x^2+y^2+z^2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\Delta t$$

$$v_y(t+\Delta t) = v_y(t) \;-\; G\,\frac{m_S}{x^2+y^2+z^2}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\Delta t$$

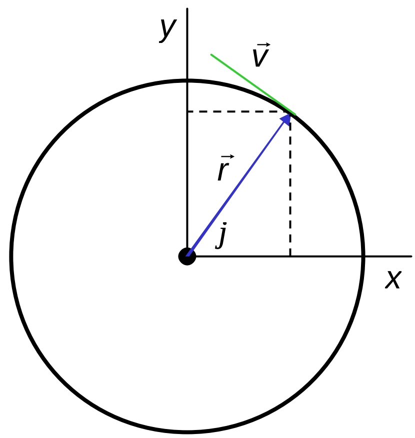
$$v_z(t+\Delta t) = v_z(t) \;-\; G\,\frac{m_S}{x^2+y^2+z^2}\,\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\Delta t$$

Analytische Behandlung von kreisförmigen Planetenbahnen:

Wichtige Methode beim Lösen von Differentialgleichungen:
„Intelligentes Raten“ der richtigen Funktion und anschließend Berechnung der Parameter.

Bahnkurve ist ein Kreis, also:

$$\vec{r} = (x, y) = (r \cos j\ , r \sin j\ )$$



Bewegung auf Kreis ist gleichförmig (Keplers Flächensatz). Winkel nimmt gleichmäßig zu.

$$j\ = w\, t \qquad w = \text{const.}$$

ω: Winkelgeschwindigkeit, (Bogenmaß!)

$$w = \frac{2p}{T} = \frac{2p \cdot r}{T \cdot r} = \frac{v}{r}.$$

T: Umlaufzeit.

Also: $\vec{r} = (r \cos w\, t, r \sin w\, t)$

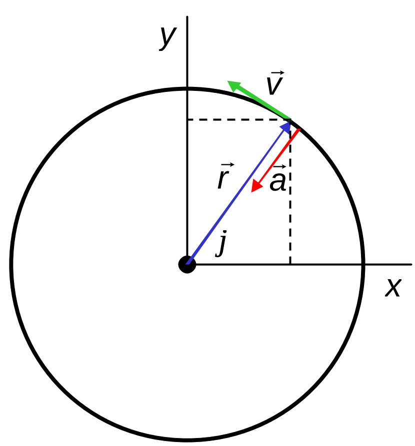
Ableitung von $\vec{r} = (r \cos w\, t, r \sin w\, t)$ nach der Zeit:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (-w\, r \sin w\, t, w\, r \cos w\, t),$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (-w^2 r \cos w\, t, -w^2 r \sin w\, t).$$

Nach Ausklammern von $-\omega^2$ ergibt sich:

$$\vec{a} = -w^{2}\, \vec{r}$$



Die Beschleunigung zeigt immer zum Zentrum des Kreises.

Sie heißt <u>Zentripetalbeschleunigung</u>

$$a = -w^2\, \mathrm{r} = -\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{r}}.$$

Bewegungen auf einer Kreisbahn sind immer beschleunigte Bewegungen.

Beschleunigung steht senkrecht zu v, sie ändert nicht Betrag von v, nur Richtung.

Die Zentripetalbeschleunigung muß durch eine Kraft verursacht werden (Newton‘s Aktionsprinzip), z.B. Gravitation.

$$m\,\vec{a} = \vec{F}(\vec{r}\,)$$

mit m_1 im Zentrum und m_2 auf der Kreisbahn ergibt sich:

$$-m_2 w^2 \vec{r} = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\Rightarrow \quad m_2 r w^2 = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Kräftegleichgewicht:

<u>Zentripetalkraft</u> = Gravitationskraft

Die Scheinkraft „Zentrifugalkraft“ ist betrags-mäßig gleich der Zentripetalkraft, aber ihr entgegengerichtet.

$$\Rightarrow \quad w^2 = G\,\frac{m_1}{r^3} \quad \Rightarrow \quad w = \sqrt{G\,\frac{m_1}{r^3}}$$

Ein Umlauf d.h. $j = 2p$ wird nach der Zeit $2p = w \cdot T$ erreicht.

$$w = \frac{2p}{T}, \qquad n = \frac{1}{T}. \qquad \text{(ν: Frequenz)}$$

Aus

$$w^2 = G\,\frac{m_1}{r^3}$$

liest man sofort wieder das 3. Kepler‘sche Gesetz ab:

$$\left(\frac{2p}{T}\right)^2 = G\,\frac{m_1}{r^3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{r^3}{T^2} = G\,\frac{m_1}{4p^2} = \text{const.}$$

<u>Bahngeschwindigkeit</u> $|\vec{v}|$:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = w\,r \cdot \underbrace{\sqrt{\sin^2 w\,t + \cos^2 w\,t}}_{=1}$$

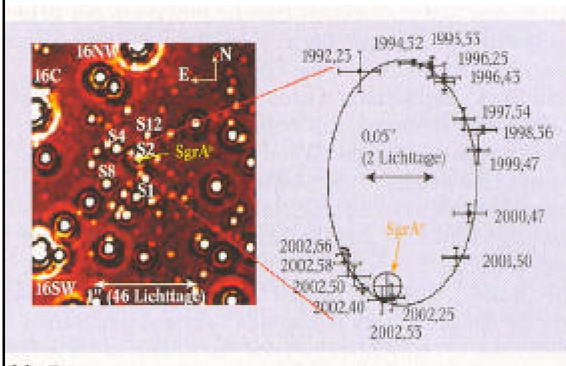
also

$$v = r \cdot w$$

Analytische Behandlung von Ellipsen schwieriger

Analytische Behandlung einer Rosettenbahn sehr schwierig

Keplerbahn eines Fixsterns um ein Schwarzes Loch im Zentrum unserer Milchstraße:



Abschätzen der Masse m_{SL} im Inneren der Ellipse:

$$m_{SL} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}.$$

(s. vorhergehende Folie, 3. Kepler-sches Gesetz)

$$m_{SL} = 9 \cdot 10^{36}\ kg.$$

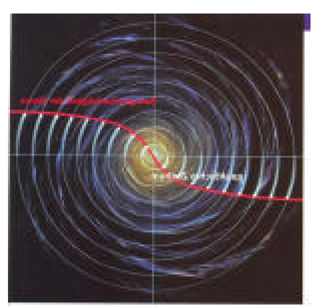
$$Mit\ m_{Sonne} = 2 \cdot 10^{30}\ kg$$

$$wird\ \boxed{m_{SL} \approx 4{,}5 \cdot 10^{6}\ m_{Sonne}}.$$

Bahn des Sterns S2 (Punkte mit Fehlerbalken) im Sternbild des Schützen um die Position der kompakten Radioquelle SgrA* (großer Kreis mit Kreuz). Die Daten werden durch eine Ellipsenbahn mit Exzentrizität 0,87, Umlaufperiode 15,7 Jahre und große Semi-Halbachse 0,12´´ beschrieben, in deren einem Fokus die Radioquelle sitzt.

Das Spektrum der Radioquelle kann als Synchrotronstrahlung relativistischer Elektronen hoher Energie in einem Magnetfeld gedeutet werden. Diese Strahlung entsteht in der Umgebung eines Schwarzen Lochs. Geschätzte Einströmung von Materie in das Schwarze Loch: Derzeit 10^{-2} Sonnenmassen pro Jahr.

Keplergesetze und die Existenz von Dunkler Materie:



Zwei Aufnahmen ferner Galaxien und eine Zeichnung (rechts) mit beobachteten Umfangsgeschwindigkeiten von Sternen in verschiedenen Abständen vom galaktischen Zentrum gemäß der gefundenen eingeschlossenen Materiedichte und dem 3. Keplerschen Gesetz.

Übereinstimmung existiert nur, wenn man die Existenz von Dunkler Materie postuliert, Nur Gravitationswirkung!