

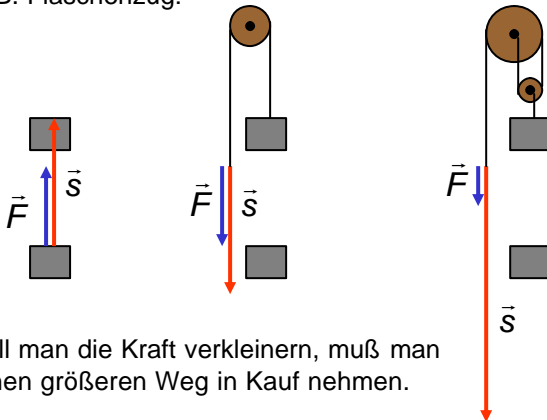
## Arbeit, Energie, Impuls und Erhaltungssätze

Beispiel:

- Arbeit wird verrichtet, wenn eine Masse angehoben wird.  
„Steine auf den Berg schleppen ist anstrengend.“
- Arbeit im physikalischen Sinne wird aber nicht verrichtet beim Erzeugen einer Kompensationskraft zur Gewichtskraft, d.h. beim Halten der Masse.
- Entgegen Alltagserfahrung: „Steine im Arm halten ist auch anstrengend.“  
Man kann die Steine auf einen Tisch legen, der die Kompensationskraft erzeugt. Der Tisch verrichtet dabei keine Arbeit, sondern es wirken nur Kräfte.
- Arbeit wird verrichtet, wenn man eine Masse gegen eine Kraft verschiebt.  
Keine Arbeit wird verrichtet bei waagrechtem Verschieben auf einer Luftkissenschiene, weil keine Kraft in diese Richtung wirkt.
- Beim Verschieben der „Steine auf dem Tisch“ wird Arbeit verrichtet, da die Verschiebung gegen die Reibungskraft verläuft.

97

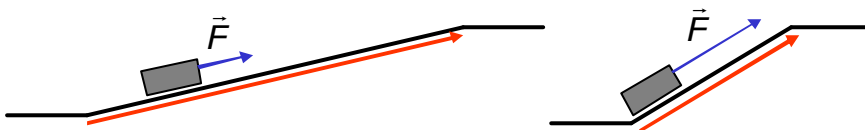
Zur Erinnerung: Zum Anheben der Masse hat man viele Möglichkeiten, z.B. Flaschenzug:



Versuch: Flaschenzug

Will man die Kraft verkleinern, muß man einen größeren Weg in Kauf nehmen.

Beispiel 2: schräge Luftkissenschiene:



98

Definition der Arbeit (ortsunabhängige Kräfte):

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

Arbeit = Kraft · Weg

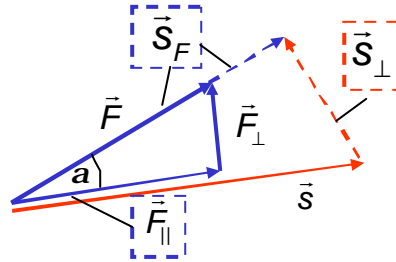
Die Arbeit ist eine skalare Größe. Sie wird aus dem Produkt zweier Vektoren berechnet: **Skalarprodukt**

Das Skalarprodukt berücksichtigt nur die Komponente des einen Vektors, die in die Richtung des anderen Vektors zeigt und die man mit dem Betrag des anderen Vektors multipliziert.

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}_{\parallel}| |\vec{s}|$$

$\vec{F}_{\perp}$  trägt nicht zur Arbeit bei.

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| |\vec{s}| \cos a$$



In kartesischen Koordinaten:

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = (F_x, F_y, F_z) \cdot (s_x, s_y, s_z) = F_x s_x + F_y s_y + F_z s_z$$

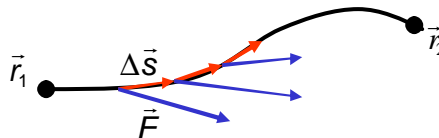
99

Ortsabhängige Kräfte, krummlinige Verschiebung in einem Kraftfeld

Die Verschiebung muß in kleine Streckenelemente zerlegt werden.

Die Arbeit wird für jedes Teilstück berechnet und aufsummiert.

$$W = \sum \vec{F} \cdot \Delta \vec{s}$$



Grenzübergang zu  $\Delta s \rightarrow 0$  liefert Integral

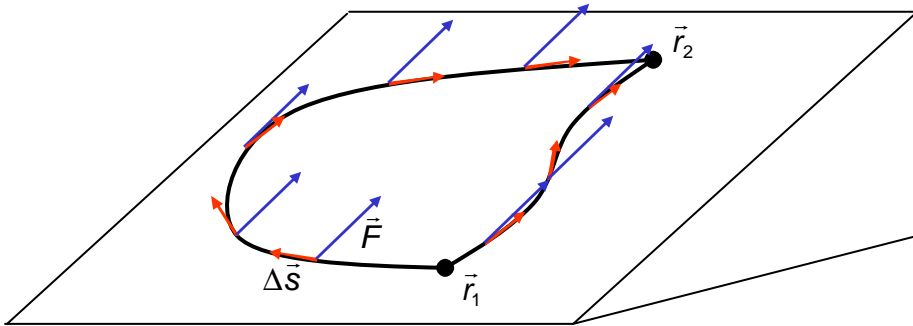
$$W = \int_{\text{Weg } s} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

Integration von einem Startpunkt  $\vec{r}_1$  entlang einer Kurve  $s(\vec{r})$  zu einem Endpunkt  $\vec{r}_2$

100

## Konservatives Kraftfeld

Beispiel: schiefe Ebene ohne Reibung (konstante Kraft)



Wenn die verrichtete Arbeit unabhängig vom Verlauf des Weges zwischen zwei beliebigen Punkten  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  ist, nennt man das Kraftfeld konservativ.

Hier zählt nur die Aufwärtskomponente des Weges, d.h. die Komponente der Verschiebung in Richtung der Kraft.

101

Äquivalente Definition:

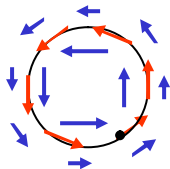
Ein Kraftfeld ist konservativ, wenn die verrichtete Arbeit entlang jeder geschlossenen Kurve gleich Null ist.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (\text{Linienintegral})$$

Anschaulich ist auch folgende äquivalente Formulierung:

Ein Kraftfeld ist konservativ, wenn in jedem Punkt die Wirbelstärke  $\text{rot } \vec{F}$  gleich Null ist.

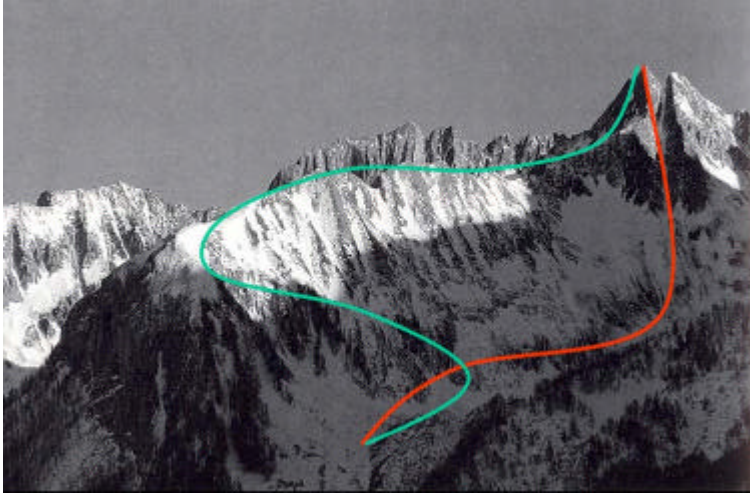
(Wirbelstärke wird mit dem mathematischen Operator  $\text{rot } \vec{F}$  berechnet.)



In einem Wirbelfeld  $\text{rot } \vec{F} \neq 0$  wird auf einer geschlossenen Bahn Arbeit verrichtet.

Das Gravitationsfeld ist ein konservatives Kraftfeld.

105

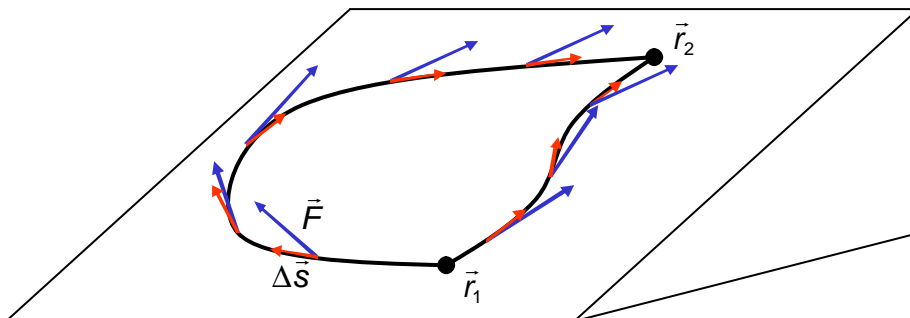


Der physikalische Arbeitsbegriff ( — = — ) steht oft im Gegensatz zur täglichen Erfahrung

102

### Wegabhängigkeit der Arbeit

Beispiel: schiefe Ebene mit Reibung



Die verrichtete Arbeit ist wegabhängig.

Ein Teil der Arbeit wird in Reibungswärme umgewandelt und liegt nicht mehr als mechanische Energie vor.

104

## Potentielle Energie

Voraussetzung: konservatives Kraftfeld. Verrichtete Arbeit hängt nur von Startpunkt  $\vec{r}_1$  und Endpunkt  $\vec{r}_2$  ab, nicht vom Wegverlauf dazwischen.

Die Arbeit, die verrichtet werden muß, um den Körper vom Startpunkt zum Endpunkt im Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{r})$  (z.B. Schwerfeld) zu verschieben, ist:

$$W = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s}$$

Vorzeichenkonvention: Das Vorzeichen ist so zu wählen, daß die dem Körper zugeführte Energie positiv zu zählen ist. Anheben des Körpers erhöht seine potentielle Energie, beim Fallen des Körpers verliert er potentielle Energie, die gegebenenfalls als äußere Arbeit abgegeben werden kann.

Hier ist eine Haltekraft  $-\vec{F}(\vec{r})$  auf den Körper wirksam, die  $\vec{F}(\vec{r})$  kompensiert, damit eine Verschiebung und keine Beschleunigung stattfindet.

Wählt man den Startpunkt als Referenzpunkt  $\vec{r}_{\text{Ref}}$  kann man jedem Ort eine potentielle Energie zuordnen.

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_{\text{Ref}}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

106

Beispiel: Potentielle Energie einer Probenmasse  $m_2$  im Gravitationsfeld einer Punktmasse  $m_1$ . (Ort der Masse am Nullpunkt des Koordinatensystems)

$$\vec{F}_G(\vec{r}) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{Kompensationskraft:} \quad \vec{F}_K(\vec{r}) = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Potentielle Energie bzgl. Referenzpunkt im Unendlichen

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_{\infty}}^{\vec{r}} \left( G \frac{m_1 m_2}{r'^2} \frac{\vec{r}'}{r'} \right) \cdot d\vec{s}, \quad (\text{Variable: } r').$$

Wahl eines bestimmten Weges: direkter Weg entlang des Radiusvektors  $\vec{r}'$

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_{\infty}}^{\vec{r}} \left( G \frac{m_1 m_2}{r'^2} \frac{\vec{r}'}{r'} \right) \cdot d\vec{r}'$$

Der Verschiebungsvektor  $d\vec{r}'$  zeigt in Richtung von  $\vec{r}'$ , obwohl von außen nach innen integriert wird (das ist bei den Integrationsgrenzen berücksichtigt).

$$\vec{r}' \cdot d\vec{r}' = r' dr'$$

107

Umschreiben des Integrals in ein Integral über skalare Größen:

$$E_{\text{pot}}(r) = \int_{\infty}^r \left( G \frac{m_1 m_2}{r'^2} \right) dr'$$

Man erhält:

$$E_{\text{pot}}(r) = G m_1 m_2 \int_{\infty}^r \frac{1}{r'^2} dr'$$

Berechnung des Integrals:

$$E_{\text{pot}}(r) = G m_1 m_2 \left[ -\frac{1}{r'} \right]_{\infty}^r$$

$$E_{\text{pot}}(r) = -G m_1 m_2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right)$$

Ergebnis: Potentielle Energie im Gravitationsfeld,

(Referenzpunkt im  $\infty$ ):

$$E_{\text{pot}}(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

108

### Potential:

Man kann aus der Gleichung die Probemasse  $m_2$  herausnehmen und analog vorgehen:

$$\mathbf{j}(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_{\text{Ref}}}^{\vec{r}} \vec{g} \cdot d\vec{s} \quad \text{analog zu:} \quad E_{\text{pot}}(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_{\text{Ref}}}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

$$\mathbf{j}(\vec{r}) = -G \frac{m_1}{r} \quad \text{analog zu:} \quad E_G(\vec{r}) = -G \frac{m_1 m_2}{r}.$$

$\phi$  ist das Gravitationspotential.

Potentielle Energie und Potential haben den Vorteil, daß sie skalare Größen sind.

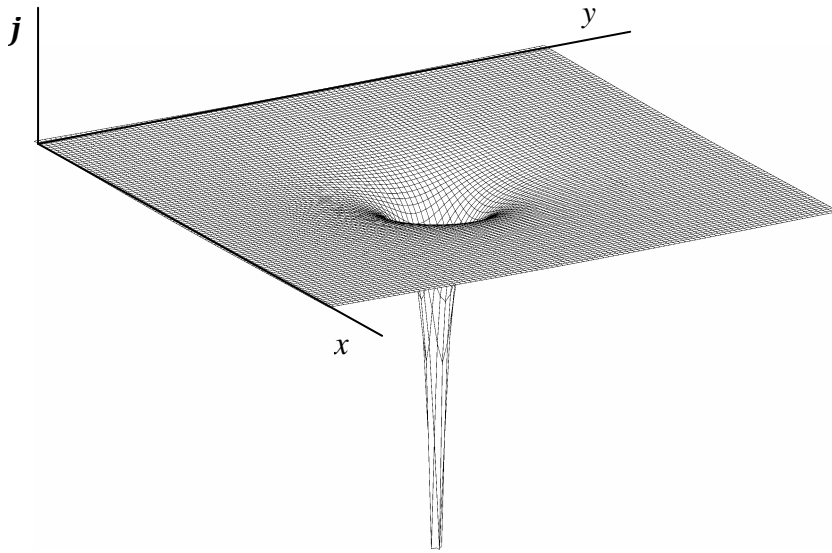
Skalare Felder:  $E_{\text{pot}}(x, y, z)$  bzw.  $\mathbf{j}(x, y, z)$

Trotzdem kann man die Kraft bzw. die Feldstärke wieder aus ihnen berechnen.

Das Gesamtpotential von mehreren Einzelmassen ist die Summe der Einzelpotentiale  $\rightarrow$  Superpositionsprinzip. (Linearität der Dglen)

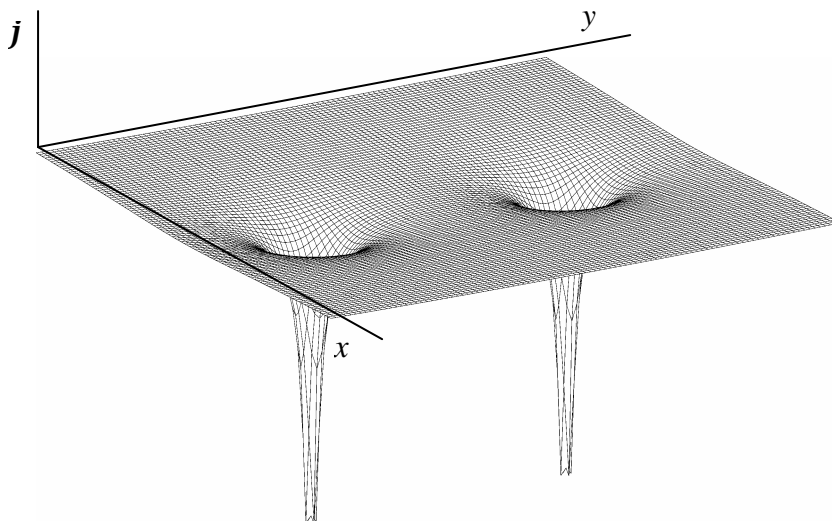
109

Potential (bzw. potentielle Energie) für eine Masse



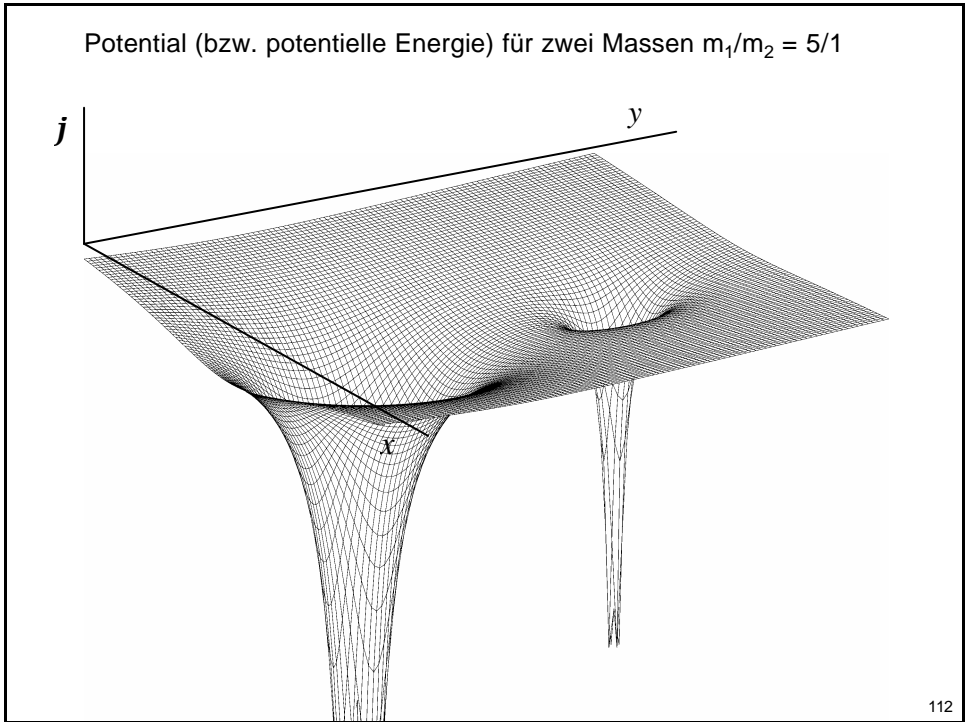
110

Potential (bzw. potentielle Energie) für zwei gleichgroße Massen

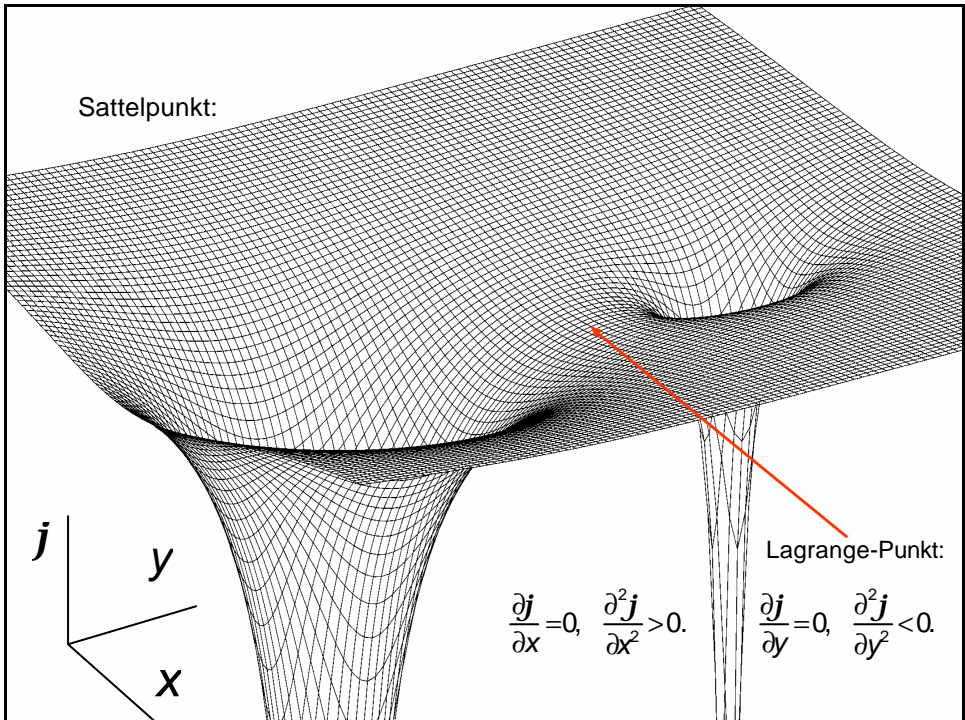


111

Potential (bzw. potentielle Energie) für zwei Massen  $m_1/m_2 = 5/1$

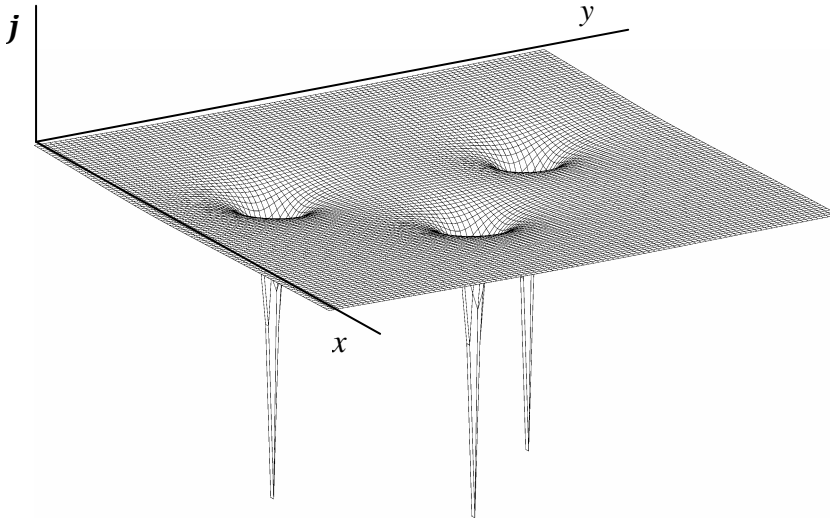


112





Potential (bzw. potentielle Energie) für drei Massen



114

Berechnung der Kraft aus dem Feld der potentiellen Energie:

$$\vec{F} = -\overline{\text{grad}} E_{\text{pot}}(\vec{r})$$

analog Berechnung der Feldstärke aus dem Potential:

$$\vec{g} = -\overline{\text{grad}} j(\vec{r})$$

Gradient in kartesischen Koordinaten:

$$\overline{\text{grad}} j(x, y, z) = \left( \frac{\partial j}{\partial x}, \frac{\partial j}{\partial y}, \frac{\partial j}{\partial z} \right) \quad (\text{Differentialoperator})$$

Der Gradient (Vektor!) gibt Richtung und Betrag der Steigung eines skalaren Feldes an. Vorstellung:

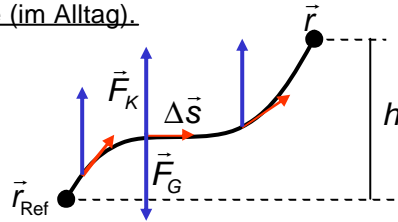
Potentielle Energie = Berglandschaft → Gradient zeigt bergauf  
Kraft wirkt bergab =  $-\overline{\text{grad}} E_{\text{pot}}(\vec{r})$

115

Potentielle Energie an der Erdoberfläche (im Alltag).

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_{\text{Ref}}}^{\vec{r}} \vec{F}_G \cdot d\vec{s}$$

$\vec{r}_{\text{Ref}}$  = Fußboden (Referenzhöhe)



Die Kraft ist in guter Näherung konstant =  $mg$  und wirkt immer senkrecht

$$E_{\text{pot}}(h) = m g h$$

$h$  vom Fußboden aus gemessen ( $h \ll r_{\text{Erde}}$ ).

Einheit der Energie und der Arbeit:

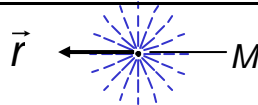
$$1 \text{ Joule} = 1 \text{ Newton} \cdot 1 \text{ Meter}$$

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N m} = 1 \text{ kg m}^2 / \text{s}^2$$

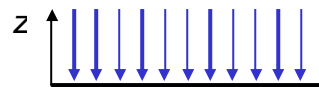
Die Einheit wird auf die bekannten Einheiten zurückgeführt.

116

Vergleich:



Feld einer Punktmasse



Gravitationsfeld im Labor

Kraft:  $\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{M m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

$$\vec{F}(\vec{r}) = (0, 0, -mg)$$

Feldstärke:  $\vec{g}(\vec{r}) = -G \frac{M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

$$\vec{g}(\vec{r}) = (0, 0, -g)$$

Potential:  $j(\vec{r}) = - \int \vec{g} \cdot d\vec{r} = -G \frac{M}{r}$

$$j(\vec{r}) = gz$$

Pot. Energie:  $E_{\text{pot}}(\vec{r}) = - \int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = -G \frac{M m}{r}$

$$E_{\text{pot}}(\vec{r}) = mgz$$

Kraft:  $\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad } E_{\text{pot}}(\vec{r}) = -G \frac{M m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -m \vec{g}$$

Feldstärke:  $\vec{g}(\vec{r}) = -\text{grad } j(\vec{r}) = -G \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

$$\vec{g}(\vec{r}) = (0, 0, -g)$$

Bezugspunkt im Unendlichen

Bezugspunkt bei  $z=0$

117

Potentielle Energie einer Masse  $m$  kann in **kinetische Energie** umgewandelt werden.

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2$$

Eine Masse in einem konservativen Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{r})$  bewege sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}(\vec{r})$ . Sie wird durch die Kraft beschleunigt:

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r})$$

In dem kleinen Zeitintervall  $\Delta t$  legt sie den Weg  $\Delta\vec{s} = \vec{v} \Delta t$  zurück. Das Kraftfeld verrichtet die Arbeit:

$$\Delta W = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \Delta\vec{s} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{v} \Delta t = m\vec{a} \cdot \vec{v} \Delta t = m \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right) \Delta t = \frac{m}{2} \frac{d(v^2)}{dt} \Delta t.$$

an der Masse. Also: (Abnahme der pot. Energie)

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} \rightarrow \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} v^2 \right) \Rightarrow W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 (+ \text{const}) (= E_{\text{kin}}).$$

118

Um den gleichen Wert hat die potentielle Energie abgenommen:

$$E_{\text{pot}}(\vec{r} + \Delta\vec{s}) = E_{\text{pot}}(\vec{r}) - \Delta W.$$

Beide Energieformen können ineinander umgewandelt werden.

In konservativen Kraftfeldern gilt somit die Erhaltung der Summe:

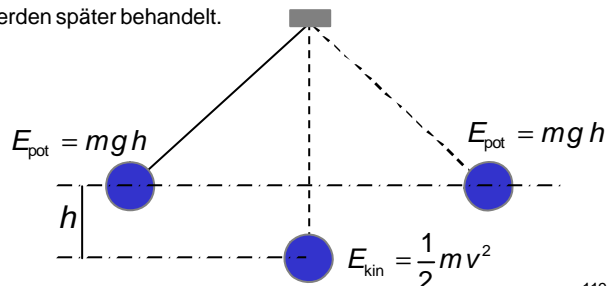
$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$$

Energieerhaltungssatz der Mechanik.

Potentielle Energie kann auch in einer elastischen Verformung stecken.

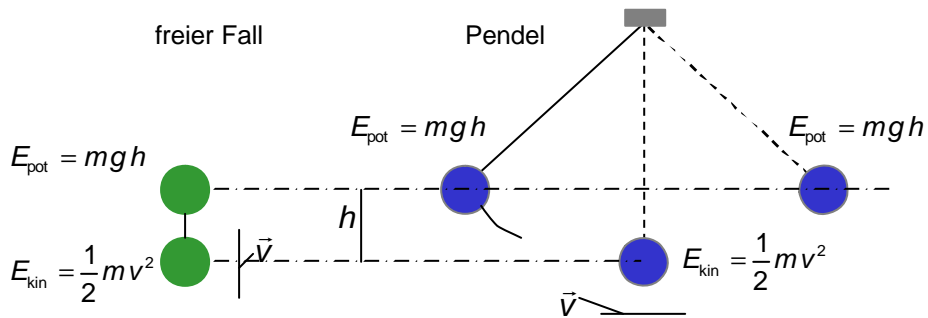
(Feder): Elastizitätskräfte werden später behandelt.

Versuch: Fadenpendel



119

Der Energiesatz ist geeignet, um z.B. den Betrag der Geschwindigkeit zu berechnen ohne die genaue Bahnkurve bestimmen zu müssen.



In beiden Fällen erhält man aus dem Energiesatz den gleichen Wert  $|\vec{v}|$ .

Beim Fadenpendel wirken zusätzliche Kräfte (Fadenspannung), die die Richtung von  $\vec{v}$  ändern, aber keine Arbeit verrichten.

Die Fadenspannung steht immer senkrecht zu  $\vec{v}$  und damit auch zum Weg  $\Delta\vec{S} = \vec{v} \Delta t$

120

### Beispiel: Planetenbewegung

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = -G \frac{m_1 m_2}{r} + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}|^2$$

Bei Kreisbewegungen bleibt  $r$  konstant  $\rightarrow E_{\text{pot}}$  ist konstant

$\rightarrow E_{\text{kin}}$  ist konstant  $\rightarrow |\vec{v}|$  ist konstant.

Bei elliptischen Bahnen wird  $E_{\text{pot}}$  und  $E_{\text{kin}}$  ineinander umgewandelt

In kartesischen Koordinaten:

$$E = -G \frac{m_1 m_2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{2} m_2 (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

Bei Planeten-(Kometen-) Bahnen mit starker Exzentrizität spielt die Umwandlung zwischen kin. und pot. Energie eine große Rolle.

121

Erhaltung der Energie ist von grundlegender Bedeutung in der Physik.

Wenn das Kraftfeld nicht konservativ ist, geht mechanische Energie bei Bewegung verloren. Reibungskräfte z.B. verwandeln kinetische Energie in Wärmeenergie, d.h. in Bewegungsenergie einzelner Gasmoleküle oder in Schwingungsenergie von atomaren Bausteinen in Festkörpern.

Energie kann z.B. auch als Strahlung transportiert werden.

→ Energie im elektro-magnetischen Strahlungsfeld.

Elektrische, magnetische Energie, Kernenergie, etc.

Die Gesamtenergie in einem abgeschlossenen System bleibt erhalten.

Die Gesamtenergie ändert sich, wenn von außen Energie zu(ab)geführt wird.

Energiebilanz stimmt nur, wenn alle Energieformen betrachtet werden.

Der Begriff „Energieverbrauch“ im Alltag bedeutet, daß „höherwertige“ Energie in geringwertige Wärmeenergie umgewandelt wird und aus thermodynamischen Gründen keine Rückumwandlung möglich ist.

Bewertung von Energie: s. Abschnitt Wärmelehre (Entropie).

122

### Massenerhaltung

In einem abgeschlossenen System bleibt die Masse erhalten.

#### Anmerkungen zur Relativitätstheorie:

Die Relativitätstheorie verknüpft beide Erhaltungssätze durch den

Zusammenhang:  $E = mc^2$

Energie und Masse können ineinander umgewandelt werden.

Massendefizit bei Energieerzeugung durch Kernprozesse direkt nachweisbar.

Speicherung der kinetischen Energie im bewegten Körper erfolgt als Masse.

$$E_{\text{Ges}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0 c^2 + E_{\text{kin}} = mc^2. \quad m_0: \text{ Ruhemasse.}$$

Massenzunahme eines Sprinters:  $5 \cdot 10^{-14} \text{ kg}$

Kinetische Energie der Erde entspricht:  $3 \cdot 10^{+16} \text{ kg}$  (vgl.  $M_{\text{Erde}} \sim 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ )

Die vergrößerte Masse unterliegt nun der Trägheit.

123

Das Gravitationsfeld ist keine Hilfsgröße zur Berechnung der Kraft, sondern ist wirklich im Raum präsent.

Es hat eine Energiedichte:

$$\frac{E}{V} = -\frac{|g|^2}{8\pi G} \quad \left| \quad \text{An der Erdoberfläche beträgt die Energiedichte:} \right. \quad \left. \frac{E}{V} \Big|_{geo} = 5,74 \cdot 10^{10} \frac{J}{m^3} \right.$$

Die potentielle Energie einer Masse ist in der Feldenergie gespeichert. Die Feldenergie ist einer Masse proportional  $E = mc^2$ , die wiederum Gravitation verursacht. Daraus Massendichte:

$$\Rightarrow \frac{m}{V} \Big|_{geo} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{E}{V} \Big|_{geo} = 0,64 \cdot 10^{-6} \frac{kg}{m^3}$$

Dieser Effekt erklärt die Periheldrehung des Merkur (Rosettenbahn).

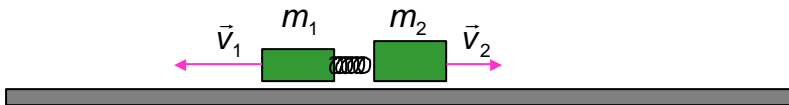
Periheldrehung pro Jahrhundert in Bogensekunden:

Messung:	5600,7 ± 0.4
Berechnete Drehung (andere Planeten u. relat. Effekte):	5557,6 ± 0.2
Differenz:	43,1 ± 0.6
Vorhersage der allgemeinen Relativitätstheorie:	43,0

124

**Impuls:** Suche nach einer gerichteten (vektoriellen) Erhaltungsgröße in einem abgeschlossenen System (ohne äußere Kräfte).

Versuch Luftkissenschiene:



Es wirken innere Kräfte (Feder) aber keine äußeren Kräfte, also der Schwerpunkt von  $m_1$  und  $m_2$  bleibt in Ruhe:  $m_1 d\vec{s}_1 = m_1 \vec{v}_1 \cdot dt = -m_2 \vec{v}_2 \cdot dt = -m_2 d\vec{s}_2$

Die Gesamtgeschwindigkeit wird nicht erhalten.

Aber für die Produkte aus Massen und Geschwindigkeiten finden wir:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0; \quad \vec{p}_1 = -\vec{p}_2. \quad \boxed{\sum \vec{p}_i = 0.}$$

Das Produkt  $\vec{p} = m\vec{v}$

nennt man Impuls. Der Impuls ist ein Vektor. **ERHALTUNGSGRÖSSE!**

Der Gesamtimpuls ändert sich nach Lösen der Feder nicht.

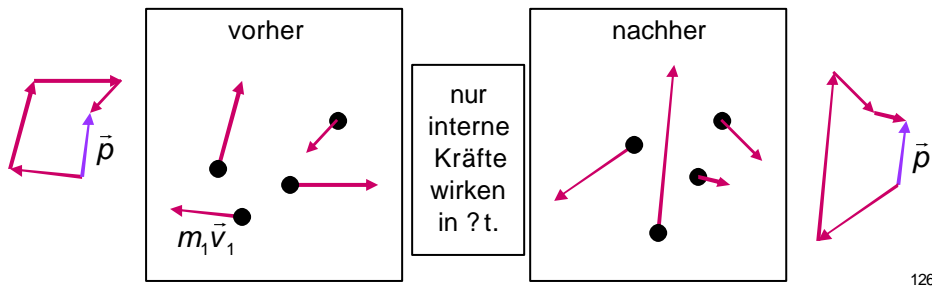
125

Impuls („Anstoß“, engl.: momentum) ist uns aus der Alltagserfahrung wenig vertraut.

Die Impulserhaltung ist wie die Energieerhaltung grundlegend in der Physik.

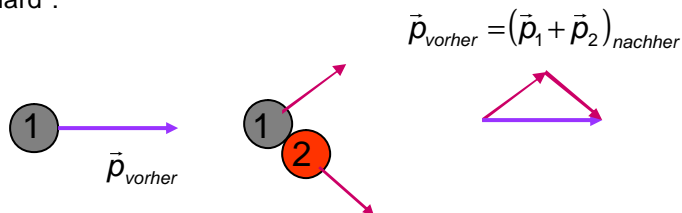
Die vektorielle Summe aller Impulse in einem abgeschlossenen System (System ohne äußere Kräfte) bleibt erhalten.

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const.}$$



126

Versuch „Billiard“:



Energie- und Impulserhaltungssatz sind ideal, um Aussagen über den Bewegungszustand nach einer Wechselwirkung zu machen, ohne die Bahnen der Massen während der Wechselwirkung zu kennen, d.h. ohne die Details der Wechselwirkung zu kennen.

127

Die Impulserhaltung ist direkte Folge des Newton'schen Reaktionsprinzipes und des Aktionsprinzipes:

Wenn die Kraft  $\vec{F}$ , die auf die Masse  $m_1$  wirkt, ihren Ursprung in der Masse  $m_2$  hat, so wirkt auf diese die entgegengesetzt gleiche Kraft  $-\vec{F}$ , (Reaktionsprinzip).

Anfangsimpuls:  $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{P}_{\text{ges}}$ .

Die Kraft  $\vec{F}$  beschleunigt  $m_1$  und die Kraft  $-\vec{F}$  beschleunigt  $m_2$ .

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}}{m_1} \quad \vec{a}_2 = \frac{-\vec{F}}{m_2} \quad (\text{Aktionsprinzip})$$

Nach dem kurzen Zeitintervall  $\Delta t$  haben die Massen die Geschwindigkeiten:

$$\vec{v}_1 + \vec{a}_1 \Delta t = \vec{v}_1 + \frac{\vec{F}}{m_1} \Delta t \quad \vec{v}_2 + \vec{a}_2 \Delta t = \vec{v}_2 + \frac{-\vec{F}}{m_2} \Delta t$$

also gilt Impulserhaltung:

$$m_1\vec{v}_1 + \vec{F}\Delta t + m_2\vec{v}_2 - \vec{F}\Delta t = \vec{P}_{\text{ges}} = \text{const.}$$

128

### Verallgemeinerte Form des Newtonschen Aktionsprinzipes

Eine Kraft auf eine Masse verursacht eine Impulsänderung:

Nach der Zeit  $\Delta t$  ist der Impuls

$$\vec{p} + \Delta\vec{p} = m\vec{v} + m\Delta\vec{v} = m\vec{v} + m\vec{a}\Delta t = m\vec{v} + \vec{F}\Delta t$$

also

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t \rightarrow \vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

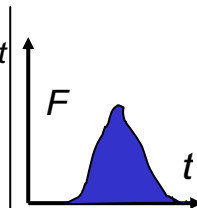
Das verallgemeinerte Aktionsprinzip lautet: **(Wichtig!)**

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \rightarrow \quad \vec{p}(T) = \int_0^T \vec{F}(t) \cdot dt + (\vec{p}_0)$$

Mit der Produktregel erhält man:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Der zweite Term ist der bekannte Term  $m\vec{a}$ , der erste Term wird in den nächsten 3 Folien behandelt.

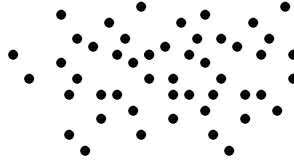


(Kraftstoß, engl.: impulse). Details der Kraftübertragung spielen **keine** Rolle!

129



Gedankenexperiment: Radfahrer ( $v(t_0) = v_0$ ) im Mückenschwarm:



Die Mücken bleiben am Radfahrer kleben.

Die Masse des Radfahrers erhöht sich um  $dm$  pro Zeitintervall  $dt$ .

Die Kraft zur Beschleunigung des Radfahrers beträgt:

$$\vec{F}(t) = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm}{dx} \cdot \frac{d|\vec{x}|}{dt} \cdot \vec{v} + m \vec{a} = m' \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \vec{e}_v + m \vec{a}.$$

1. Term ist der Impulsübertrag auf die Mücken (Beschleunigung der Mücken von 0 auf  $v$ ), die Mücken haben im Mittel keinen Anfangsimpuls. Dieser Term tritt auch bei  $v = \text{const.}$  auf!

130

Versuch Rakete:

Rakete ändert ihre Masse durch den Ausstoß von verbranntem Treibstoff.  
Berechnung im Bezugssystem Erde.

Im Zeitintervall  $dt$  stößt die Rakete die Masse  $dm$  mit

Relativgeschwindigkeit  $\vec{u} = \vec{v}_T - \vec{v}_R$  aus.

Der Impulsübertrag auf den Treibstoff ist  $d\vec{p} = dm_T \vec{u}$ .

Die Kraft auf die Rakete (Gegenkraft) ist also:

$$\vec{F} = - \frac{d\vec{p}}{dt} = - \frac{dm_T}{dt} \vec{u}.$$

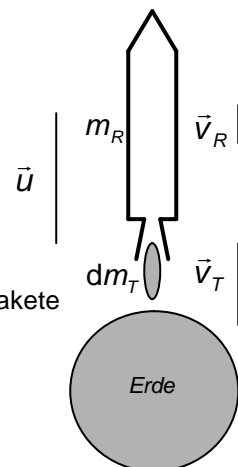
Sie wirkt gegen die Gewichtskraft und beschleunigt die Rakete

$$\vec{F} = m_R \frac{d\vec{v}_R}{dt} - m_R \vec{g}.$$

Gleichsetzen liefert:

$$\frac{d\vec{v}_R}{dt} = - \frac{1}{m_R} \frac{dm_T}{dt} \vec{u} + \vec{g}.$$

Beachte:  $dm_T = -dm_R$



131

Lösen der Differentialgleichung durch Integration:

$$\frac{d\vec{v}_R}{dt} = \frac{1}{m_R} \frac{dm_R}{dt} \vec{u} + \vec{g}$$

$$\int_0^t \frac{d\vec{v}_R}{dt'} dt' = \int_0^t \left( \frac{1}{m_R(t')} \frac{dm_R}{dt'} \vec{u} + \vec{g} \right) dt' \quad (\text{Integrationsvariable: } t')$$

$$\vec{v}_R(t) - \vec{v}_R(0) = \vec{u} \int_{m(0)}^{m(t)} \frac{1}{m'_R} dm'_R + \int_0^t \vec{g} dt' \quad (\text{Umkehrung der Kettenregel})$$

$$\vec{v}_R(t) - \vec{v}_0 = \vec{u} (\ln m_R(t) - \ln m_0) + \vec{g}t$$

$$\vec{v}_R(t) = \vec{v}_0 + \vec{u} \ln \frac{m_R(t)}{m_0} + \vec{g}t; \quad \ln \frac{m_R(t)}{m_0} < 0.$$

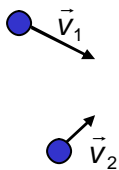
Endgeschwindigkeit hängt nur von der Ausstoßgeschwindigkeit  $u$  und vom Verhältnis Nutzlast / Startmasse ab.

132

### Stoßgesetze (Anwendung des Impuls- und Energieerhaltungssatzes)

Elastischer Stoß:

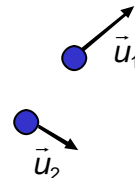
keine Kräfte



Konservative (Energie-erhaltende) Kräfte

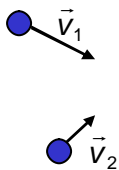


keine Kräfte



Inelastischer Stoß:

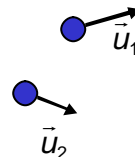
keine Kräfte



nicht konservative Kräfte



keine Kräfte



133

Die Impulserhaltung gilt für elastische und inelastische Stöße :

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 .$$

Für elastische Stöße gilt zusätzlich die Erhaltung der kinetischen Energien:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 ,$$

bei inelastischen Stößen wird mechanische Energie in andere Energieformen (z.B. Wärme) umgewandelt.

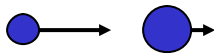
Es gilt nur noch die Ungleichung:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 > \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 .$$

134

Elastische Stöße im „Laborsystem“:

Zentraler Stoß (eindimensionale Bewegung)



Es gelten beide Erhaltungssätze:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \quad \text{oder : } p_1 + p_2 = p_1' + p_2' .$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2, \quad \text{oder :}$$

$$\frac{p_1^2}{2 m_1} + \frac{p_2^2}{2 m_2} = \frac{p_1'^2}{2 m_1} + \frac{p_2'^2}{2 m_2} .$$

Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten  $p_1'$  und  $p_2'$  . :

135

$$(I): \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \quad \text{oder: } p_1 + p_2 = p_1' + p_2'.$$

$$(II): \quad \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}.$$

Auflösung:

$$(II): \quad \frac{1}{2m_1}(p_1^2 - p_1'^2) = \frac{1}{2m_2}(p_2'^2 - p_2^2).$$

$$(II): \quad \frac{1}{2m_1}(p_1 - p_1')(p_1 + p_1') = \frac{1}{2m_2}(p_2' - p_2)(p_2' + p_2).$$

$$\text{Mit (I): } p_1 - p_1' = p_2' - p_2.$$

$$u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad \downarrow \quad u_2 = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

136

### Spezialfälle zum zentralen elastischen Stoß:

1. Massen der Kugeln sind gleich:

$$u_1 = v_2, \quad u_2 = v_1.$$

Geschwindigkeiten werden vertauscht.

2. Gleiche Massen und zweite Kugel ruht vor dem Stoß:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = v_1.$$

Erste Kugel ruht nach dem Stoß und maximaler Energieübertrag erfolgt.

3.  $m_2$  unendlich groß und ruht:

$$u_1 = -v_1, \quad u_2 = 0$$

Masse 1 wird reflektiert, kein Energieübertrag, maximaler Impulsübertrag

$$\Delta p = m_1 v_1 - m_1 u_1 = 2m_1 v_1.$$

137

Versuch: Stöße mit Wagen auf Luftkissenschiene



$$\begin{array}{l} v_1 = v \quad m_1 = m \\ v_2 = 0 \quad m_2 = m \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_2 = v \end{array}$$



$$v_1 = v \quad m_1 = m \Rightarrow u_1 = -v$$

138



$$\begin{array}{l} v_1 = v \quad m_1 = m \\ v_2 = 0 \quad m_2 = 2m \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} = -\frac{1}{3}v \\ u_2 = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1v_1}{m_1 + m_2} = +\frac{2}{3}v \end{array}$$



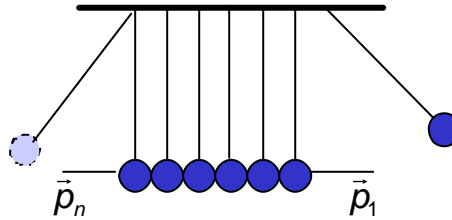
$$\begin{array}{l} v_1 = v \quad m_1 = 2m \\ v_2 = 0 \quad m_2 = m \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} = +\frac{1}{3}v \\ u_2 = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1v_1}{m_1 + m_2} = +\frac{4}{3}v \end{array}$$

139

Versuch: Kugelreihe mit und ohne Klebewachs

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_n$$

Der von der rechten Kugel ausgehende Kraftstoß  $\vec{p}_1$  wandert durch die Kugelreihe und wird als  $\vec{p}_n$  an die linke Kugel abgegeben und umgekehrt.

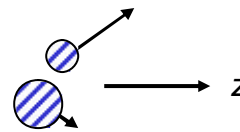
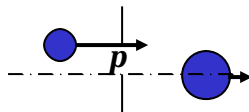


Inelastischer Stoß:

Klebewachs zwischen den Kugeln führt zu Verlust von mechanischer Energie (inelastischer Stoß).

140

Dezentraler Stoß (dreidimensionale Bewegung)



Es gelten beide Erhaltungssätze mit vektoriellen Geschwindigkeiten.

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \quad \left| \quad \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 = \frac{1}{2} m_1 |\vec{u}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{u}_2|^2 \right.$$

In Komponentenschreibweise:

Jede Komponente des Impulses wird für sich erhalten

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}$$

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y}$$

$$m_1 v_{1z} + m_2 v_{2z} = m_1 u_{1z} + m_2 u_{2z}$$

4 Gleichungen mit 6 Unbekannten  $u_{1x}, u_{1y}, u_{1z}, u_{2x}, u_{2y}, u_{2z}$ .

$$\frac{1}{2} m_1 (v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_{2x}^2 + v_{2y}^2 + v_{2z}^2) = \frac{1}{2} m_1 (u_{1x}^2 + u_{1y}^2 + u_{1z}^2) + \frac{1}{2} m_2 (u_{2x}^2 + u_{2y}^2 + u_{2z}^2)$$

Ergebnis hängt von der Geometrie des Stoßes ab. → Berechnung der Bahnen aus der Kenntnis der Stoßparameter  $\vec{p}_x, \vec{p}_y$ .

141

## Dezentraler Stoß im **Schwerpunktsystem**

Wahl des Koordinatensystems führt zur Vereinfachung.

Jedes Inertialsystem ist zur Beschreibung physikalischer Vorgänge geeignet (siehe nächster Abschnitt).

Geradlinig-gleichförmig bewegte Koordinatensysteme sind Inertialsysteme.

**Schwerpunkt** (Massenmittelpunkt).

Definition: Der Punkt

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \quad M: \text{Gesamtmasse} = \sum_i m_i$$

heißt Schwerpunkt. (Siehe Abschnitt: „Rotation“)

Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems wird erhalten,

$$\vec{p}_{\text{gesamt}} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = M \dot{\vec{r}}_S = M \vec{v}_S = \vec{p}_S$$

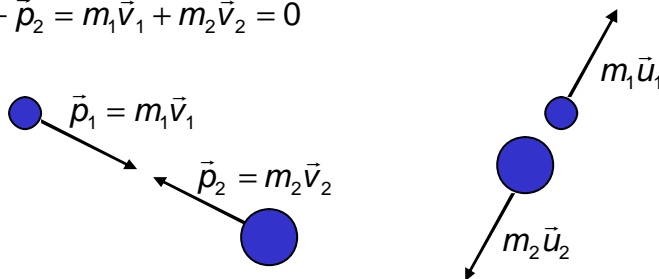
also bewegt sich der Schwerpunkt geradlinig-gleichförmig.

Er ist Ursprung eines Inertialsystems.

142

Der Gesamtimpuls **im Schwerpunktsystem** ist Null, da der Schwerpunkt nun im Ursprung ruht. Für zwei Teilchen gilt:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0$$



Die kinetische Energie wird beim elastischen Stoß erhalten:

$$\frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 = \frac{1}{2} m_1 |\vec{u}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{u}_2|^2$$

mit  $m_1 |\vec{v}_1| = m_2 |\vec{v}_2|$  und  $m_1 |\vec{u}_1| = m_2 |\vec{u}_2|$  folgt,

daß sich nur die Richtung der Geschwindigkeiten ändert (Impulsübertrag), aber beide Massen ihre kinetischen Energien beibehalten.

Bei drei Teilchen kann auch Energie ausgetauscht werden.

143

Da der Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem immer Null ist, gilt:

$$\vec{p}_{1,S} = -\vec{p}_{2,S} \text{ und } \vec{p}'_{1,S} = -\vec{p}'_{2,S} \quad \text{und:}$$

$$\frac{p_1^2}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{p_1'^2}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \quad \text{oder:}$$

$$\frac{p_1^2}{2} \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \right) = \frac{p_1'^2}{2} \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \right)$$

mit der „reduzierten Masse“  $\mu$ : 
$$\mathbf{m} = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} :$$

$$\frac{p_1^2}{2\mathbf{m}} = \frac{p_1'^2}{2\mathbf{m}} .$$

Kinetische Energie im Schwerpunktsystem bleibt beim elastischen Stoß erhalten

144

### Inelastischer Stoß im Schwerpunktsystem:

Der Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem ist Null

$$\sum_i \vec{p}_i = 0$$

Durch Energieumwandlung wird die kinetische Energie kleiner.

Nach dem Stoß muß immer noch gelten:

$$\sum_i \vec{p}'_i = 0$$

Aber die einzelnen Impulse können kleiner geworden sein.

Im Extremfall können alle Einzelimpulse Null werden.

Umwandlung der gesamten kinetischen Energie der Relativbewegungen.

### Vom anderen Koordinatensystem aus gesehen:

Der „Schwerpunktimpuls“ und die „Schwerpunktenergie“ bleiben übrig:

$$\vec{p}_S = M\vec{v}_S \quad E_S = \frac{1}{2} M |\vec{v}_S|^2$$

145



### Stöße an Wänden:

Das System ist nicht abgeschlossen. Äußere Kräfte der Wand.

#### 1. elastisch:

Die Wand bleibt in Ruhe, also kein Energieübertrag auf die Wand.

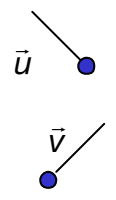
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mu^2 \Rightarrow |\vec{v}| = |\vec{u}|$$

Keine Kräfte parallel zur Wand

$$mv_{\parallel} = mu_{\parallel}$$

$$mv_{\perp} = -mu_{\perp}$$

also: Einfallswinkel =  
Ausfallswinkel (Reflexions-  
gesetz)



#### 2. inelastisch:

$$\frac{1}{2}mv^2 > \frac{1}{2}mu^2 \Rightarrow |\vec{v}| > |\vec{u}|$$

Keine Kräfte parallel zur Wand

$$mv_{\parallel} = mu_{\parallel}$$

Folglich:  $|mv_{\perp}| > |-mu_{\perp}|$

