

Leistung, Reibung

Leistung P:

Verrichtete Arbeit pro Zeit:

$$P = \frac{dW}{dt}$$



J. Watt 1736 - 1819

Einheit der Leistung: 1 Watt = 1 J/s = 1 kg m² / s³

$$W = \int_{x_0}^{x_1} \vec{F} d\vec{s} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \frac{d\vec{s}}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

147

Leistung beim Beschleunigen:

Beschleunigung mit konstanter Kraft:

$$m \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = \vec{F}$$

Differentialgleichung integrieren:

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{v}(t) = \frac{\vec{F}}{m} t + \vec{v}_0$$

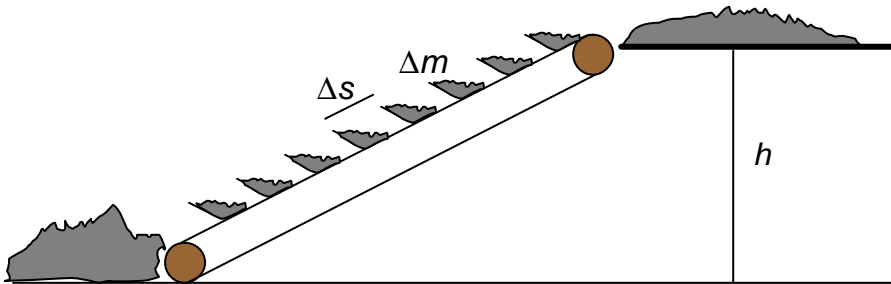
$$\vec{x}(t) = \frac{\vec{F}}{2m} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{x}_0$$

$$\Rightarrow P(t) = \vec{F} \cdot \vec{v}(t) = \frac{F^2}{m} t + \vec{v}_0 \cdot \vec{F} \text{---(Wichtig z.B. bei Reibung!)}$$

Die Leistung steigt quadratisch mit der beschleunigenden Kraft, aber linear mit der Zeit an

148

Leistung und potentielle Energie:



$$\Delta E_{\text{pot}} = \Delta m g h$$

$$P = \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} g h, \quad \text{oder (mit } v = \frac{\Delta s}{\Delta t}\text{):}$$

$$P = \frac{\Delta m}{\Delta s} v g h. \quad (\text{Leistung proportional zur Geschwindigkeit des Bandes})$$

Der Motor muss die Leistung P liefern.

149

Reibung (nur phänomenologische Behandlung):

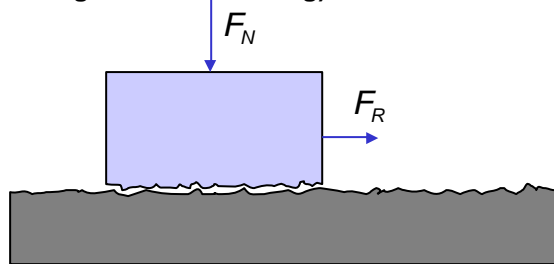
1. Haftreibung

$$|\vec{F}_R| \leq m_H |\vec{F}_N|$$

F_N : Normalkraft

F_R : Reibungskraft

m_H : Haftreibungskoeffizient

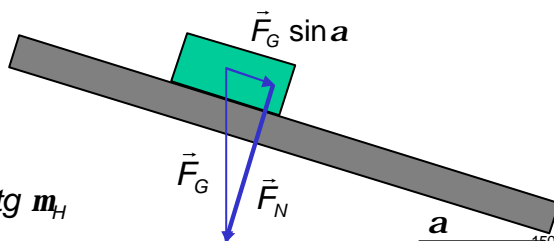


Die Haftreibung hängt nicht von der Auflagefläche, sondern nur von der Andruckkraft und der Oberflächenbeschaffenheit ab.

Der Körper beginnt zu rutschen, wenn

$$F_G \sin a \geq m_H F_G \cos a$$

$$\Rightarrow m_H = \tan a, \quad a = \arctg m_H$$



150

2. Gleitreibung

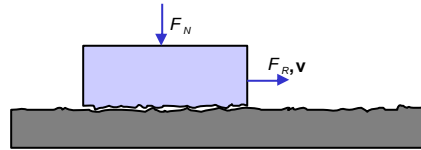
Wenn der Körper rutscht, wird die Reibungskraft geringer:

$$|\vec{F}_R| = m_G |\vec{F}_N|$$

F_N : Normalkraft

F_R : Reibungskraft

μ_G : Gleitreibungskoeffizient



$$m_G \leq m_H$$

Material	μ_H	μ_G
Stahl-Stahl	0.7	0.6
Alu-Alu	1.0	1.0
Glas-Glas	0.9	0.4
Teflon-Teflon	0.04	0.04
Gummi-Beton	1.0	0.8
Gummi-Beton (naß)	0.3	0.25

151

3. Rollreibung

Analog:

$$|\vec{F}_R| = m_R |\vec{F}_N|$$

F_N : Normalkraft

F_R : Reibungskraft

μ_R : Rollreibungskoeffizient

Material	μ_R
Stahl – Stahl	0.001
Gummi-Beton	0.01

$$m_R \ll m_G, m_H$$

152

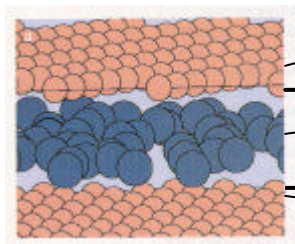
4. Reibung und Schmierung (Modelle im atomaren Maßstab)



ca. 0,5 nm

Schmiermittel-Moleküle (grün) füllen genügend große Zwischenräume zwischen zwei aufeinander reibenden Flächen aus und verhindern so die unmittelbare Berührung (Adhäsion, d.h. schwache chemische Bindung) beider Flächen. Bei einer Gleitbewegung wandern die Moleküle in benachbarte atomare Lücken geeigneter Größe.

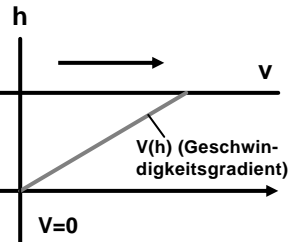
Oberfläche im atomaren Maßstab



Unterste Atomlage (Grenzschicht) des oberen Mediums

Schmiermittel-Moleküle (mehrere Moleküllagen)

Öberste Atomlage (Grenzschicht) des unteren Mediums



$V(h)$ (Geschwindigkeitsgradient)

$V=0$

Beide Grenzflächen haben i. allg. unterschiedliche atomare Abmessungen (Gitterkonstanten). Die Reibung zwischen den beiden Grenzflächen wird ersetzt durch die viskose Reibung in dem flüssigen Schmiermittel, Geschwindigkeitsgradient dv/dh .

153

5. Viskose Reibung (Stokes-Reibung)

Kleine Kugel mit Radius r bewegt sich langsam in einer viskosen Flüssigkeit:

$$\vec{F}_R = -6\pi\eta r \vec{v}. \quad (\text{Die Reibungskraft ist der Geschwindigkeit } v \text{ entgegengerichtet})$$

η : Viskosität der Flüssigkeit.

Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit, also ist die an das reibende Medium abgegebene Leistung $P = F \cdot v$ proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit.

Unter dem Einfluß der Gewichtskraft: Nach anfänglicher Beschleunigung konstante Sinkgeschwindigkeit: \vec{V}_S

Gleichgewicht: $\vec{F}_R = -\vec{F}_G,$

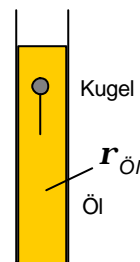
$$-6\pi\eta r \vec{v} = -m\vec{g},$$

$$\vec{v}_S = \frac{m\vec{g}}{6\pi\eta r}.$$

Für Kugeln aus dem gleichen Material (gleiche Dichte?) aber verschiedenen Radien r ergeben sich unterschiedliche Sinkgeschwindigkeiten v_S :

$$m = \frac{4\pi}{3} r^3 \cdot \rho' \Rightarrow \vec{v}_S = \frac{2 r^2 \rho' \vec{g}}{9\eta}$$

$\rho' = \rho - \rho_{\text{Öl}},$ (Auftrieb)



154

6. Schnelle Bewegung in Gas oder Flüssigkeit (Turbulenz)

Reibungskraft ist jetzt proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit v
(Wirbelbildung)


$$F_R = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2$$

c_w Widerstandskoeffizient (Kugel: $c_w \cong 0,4$; Stromlinienform: $c_w < 0,1$)

ρ Dichte des Mediums (Gas, Flüssigkeit)

A Querschnittsfläche

Widerstandsbeiwerte c_w :

_____	(Stromlinienprofil)		0,06		0,4 (Kugel)
_____	(Tragflächenprofil)		0,1		0,8 (Halbkugel)
_____	"		0,2		1,2 (Scheibe)
_____					1,4 (Kugelkalotte)

155

Leistung beim Autofahren:

Parameter für Auto: $m = 1000 \text{ kg}$, $A = 3 \text{ m}^2$, $c_w = 0,5$, $\rho_{\text{Luft}} = 1,2 \text{ kg/m}^3$

Rollreibung:

$$F_{R,1} = m_R mg = 100 \text{ N}$$

Luftwiderstand:

$$F_{R,2} = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2 = 0,9 \text{ kg/m} \cdot v^2$$

Leistung:

$$P = F_{R,\text{ges}} \cdot v$$

Bei 50 km/h (= 13,88 m/s): $F_{\text{ges}} = 100 \text{ N} + 174 \text{ N} = 274 \text{ N}$

$$P = 3800 \text{ W} \cong 4 \text{ kW}$$

Bei 150 km/h (= 41,66 m/s): $F_{\text{ges}} = 100 \text{ N} + 1562 \text{ N} = 1662 \text{ N}$

$$P = 69240 \text{ W} \cong 70 \text{ kW}$$

Leistung gegen Luftwiderstand ist ungefähr proportional zu v^3

156