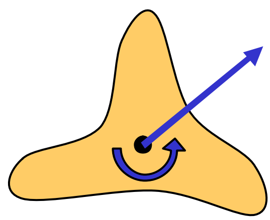
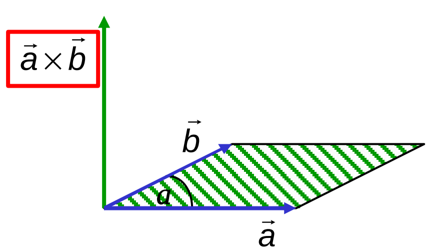
Rotierende Systeme, Dynamik starrer Körper

Bewegungen starrer Körper werden zerlegt in Translation des Schwerpunktes und Rotation. Für die Translation des Schwerpunktes gelten die bisher behandelten Gesetze.

Versuch: Bewegung auf Luftkissentisch



Einschub über Kreuzprodukt (Vektorprodukt, äußeres Produkt)



Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Sinne einer Rechtsschraube, (Korkenzieher-Regel).

Betrag: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\alpha$

(Größe der grün schraffierten Fläche)

In kartesischen Koordinaten:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Merkregel: Determinantenform

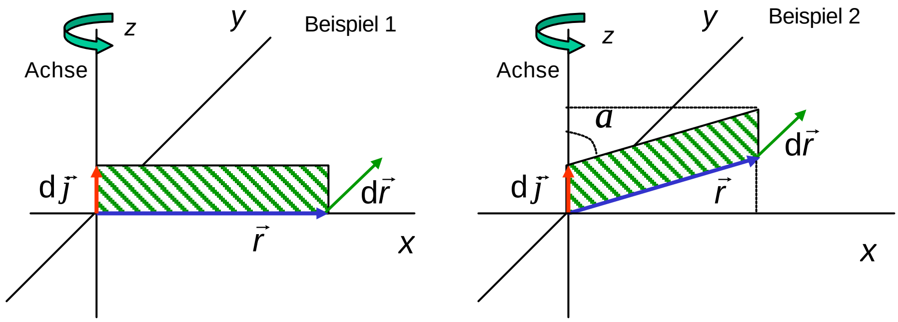
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Beachte:

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (nicht-kommutativ!)

$\vec{a} \times \vec{a} = 0$

Anwendung bei Drehung: $(d\vec{r} = d\vec{j} \times \vec{r})$



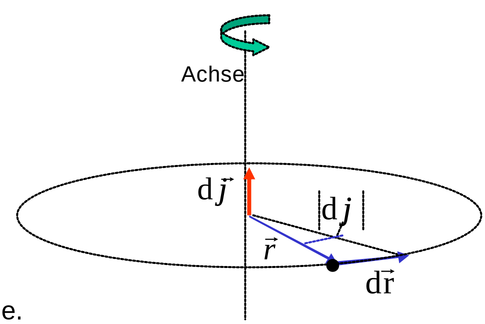
dr steht jeweils senkrecht auf der schraffierten Ebene (zeigt nach hinten)

Ebenso wie $d\vec{r}$ bei der linearen Verschiebung,
erzeugt $d\vec{j}$ bei einer Drehung um die Achse eine Verschiebung
des Punktes $\vec{r}$ um $d\vec{r}$

Rotation um eine fest eingespannte Achse

Beschreibung einer Rotation:

$$d\vec{r} = d\vec{j} \times \vec{r}$$



Richtung von $d\vec{j}$
= Richtung der Drehachse

Betrag von $d\vec{j}$
= Winkel, um den gedreht wurde.

Einheit von $\vec{j}$: rad, Dimension 1
1° = 2π/360 (in rad), 1 rad = 360/2π = 57,296…°

Winkelgeschwindigkeit

$$\boxed{\vec{w} = \frac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}t}}$$

hat die Richtung der Drehachse ebenso wie $\mathrm{d}\vec{j}$.

Der Betrag gibt die „Drehgeschwindigkeit“ an.

Einheit: rad/s, 1/s.

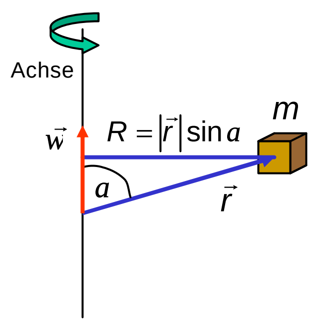
Bei konstantem $\vec{w}$ gilt:

$$w = \frac{2p}{T}, \qquad T : \text{Zeit für eine Umdrehung} .$$

Wenn die Achse durch den Ursprung des Koordinatensystems geht, ist die momentane Geschwindigkeit eines Punktes im Abstand r von der Achse (Umfangsgeschwindigkeit):

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r} = \vec{w} \times \vec{r}$$

Trägheitsmoment



Bewegungsenergie bei Rotation:

$$E_{rot} \left(= E_{kin}\right) = \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} m \left|\vec{w} \times \vec{r}\right|^2$$

Für Kreuzprodukt gilt:

$$\left|\vec{w} \times \vec{r}\right| = \left|\vec{w}\right| \left|\vec{r}\right| \sin a = w R$$

Es folgt:

$$E_{rot} = \tfrac{1}{2} m w^2 R^2$$

Bei ausgedehnten Körpern Zerlegung in kleine Elemente m_i:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} w^2 \sum_i m_i R_i^2 = \frac{1}{2} J w^2 . \qquad \text{mit}$$

$$\boxed{J = \sum_i m_i R_i^2 \qquad J : \text{Trägheitsmoment}}$$

Einheit: kg m^2

Massenelemente, die weiter von der Achse entfernt sind, besitzen höhere kinetische Energie, da ihre Umfangsgeschwindigkeit größer ist, und tragen mehr zum Trägheitsmoment bei.

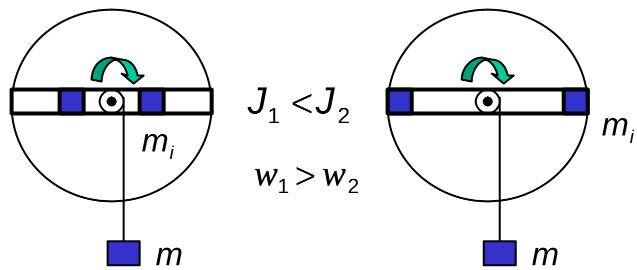
Aus der Analogie zwischen den Formeln erkennt man:

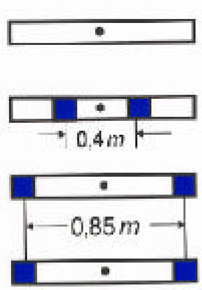
$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}\, m\, v^2 \quad \Longleftrightarrow \quad E_{rot} = \tfrac{1}{2}\, J\, w^2 .$$

Bei Rotationen spielt das Trägheitsmoment die gleiche Rolle wie die Masse bei Translationen.

<u>Versuch:</u> $\tfrac{1}{2} J_1 w_1^2 = mgh$ $\qquad \tfrac{1}{2} J_2 w_2^2 = mgh$

$$J = \sum_i m_i R_i^2$$





$M = 1{,}1\,kg$

(1.): $W = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2$ (2.): $W = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$ $\Big\}$ $J_1 \omega_1^2 = J_2 \omega_2^2$. $\left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$

$$\frac{J_1}{J_2} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2$$

(3.): $W = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2$ (4.): $4W = \frac{1}{2} J_3 \omega_4^2$

$$J_2 = J_1 + 2{,}2\,kg \cdot (0{,}2\,m)^2 = J_1 + \underbrace{0{,}088\,kg\,m^2}_{B_2}$$

$$B_3 = 2{,}2\,kg \cdot (0{,}425\,m)^2 = 0{,}397\,kgm^2$$

$$\boxed{J_1 = (J_1 + B_2) \cdot \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \frac{T_1^2 \cdot B_2}{T_2^2 - T_1^2}}$$

$$\boxed{J_1 = \frac{T_1^2 \cdot B_3}{T_3^2 - T_1^2}}$$

$$\frac{B_2}{B_3} \overset{!}{=} \frac{T_2^2 - T_1^2}{T_3^2 - T_1^2} \doteq 0{,}222$$

gemessen: $\frac{B_2}{B_3} = \frac{4752}{21177} = 0{,}2244$

Meßergebnisse:

$T_1 = 32$ ms $T_1^2 = 1024$

$T_2 = 76$ " $T_2^2 = 5776$

$T_3 = 149$ " $T_3^2 = 22201$

$T_4 = 74$ " $T_4^2 = 5476$

Aus (3) u. (4):

$$\tfrac{1}{2} J_3 \omega_4^2 = 2 J_3 \omega_3^2 \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{\omega_3^2}{\omega_4^2} = \frac{T_4^2}{T_3^2} \rightarrow \frac{1}{2} \overset{!}{=} \frac{T_4}{T_3}$$

gemessen: $\frac{T_4}{T_3} = 0{,}4966$

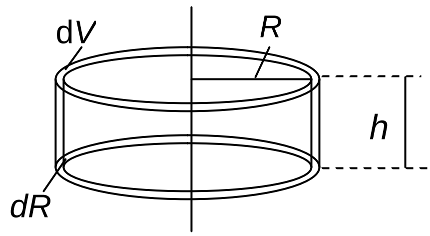
Integrale Schreibweise:

beim Grenzübergang $m_i \rightarrow dm$ erhält man mit $\frac{dm}{dV} = r$ (Dichte):

$$\boxed{J = \int_V r R^2 \mathrm{d}V}$$

R: Abstand des Volumenelements von der Achse

Annahme: $r = \frac{dm}{dV} \Rightarrow \frac{m}{V}$. Die Dichte ist in V konstant.



Beispiel: Vollzylinder

$$J = \int_V r R^2 \underbrace{2p R h \,\mathrm{d}R}_{\mathrm{d}V}$$

$$= 2p\, r h \int_0^{R_{max}} R^3 \,\mathrm{d}R$$

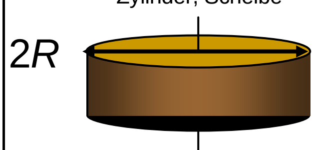
$$= \tfrac{1}{2} p\, r h R_{max}^4 = \tfrac{1}{2} M R_{max}^2$$

Wichtig: Geschickte Wahl von dV! (Hier: Zylinderschale)

Gesamtmasse: $M = r\, p\, R_{max}^2\, h$

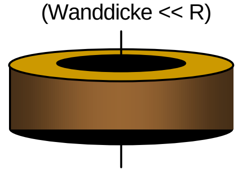
Beispiele für Trägheitsmomente:

Zylinder, Scheibe



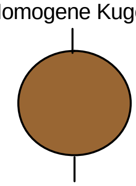
$J = \frac{1}{2} M R^2$

Hohlzylinder (Wanddicke << R)



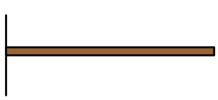
$J = M R^2$

Homogene Kugel



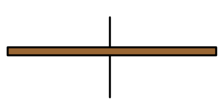
$J = \frac{2}{5} M R^2$

Stab - Achse am Ende



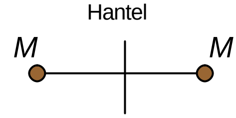
$J = \frac{1}{3} M L^2$

Stab - Achse in der Mitte



$J = \frac{1}{12} M L^2$

Hantel



$J = \frac{1}{2} M L^2$

M: Gesamtmasse, R: Radius, L: Gesamtlänge

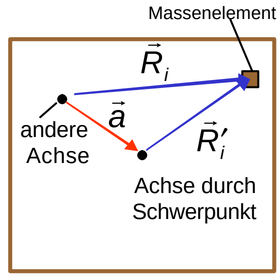
Versuch: Abrollen von 3 Körpern (Zylinder, Hohlzylinder, Kugel) mit gleichen Massen und gleichen Radien auf der Schiefen Ebene.

<u>Steinerscher Satz:</u> (Parallel-Axis Theorem)

Ist das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt bekannt, ergibt sich für eine andere, dazu parallele Achse:

$$\begin{aligned} J &= \sum_i m_i R_i^{\,2} \\ &= \sum_i m_i \left|\vec{a} + \vec{R}'_i\right|^2 \\ &= \sum_i m_i \,(a^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{R}'_i + R'^2_i) \\ &= \sum_i m_i R'^2_i + 2\vec{a}\underbrace{\sum_i m_i \vec{R}'_i}_{=0} + a^2 \sum_i m_i \end{aligned}$$

(Definition des Schwerpunktes: $\sum_i m_i \vec{R}_i = 0.$)



Das Trägheitsmoment bezüglich der neuen Achse:

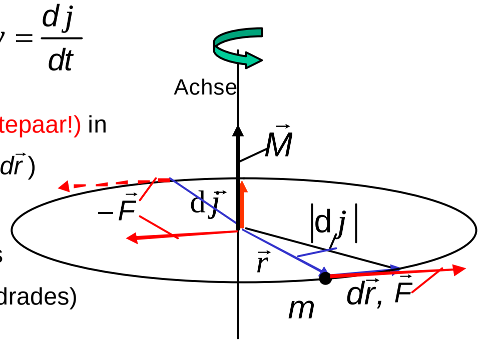
$$\boxed{J = J_S + Ma^2}$$

a : Abstand der Achse vom Schwerpunkt

Drehmoment

<u>Intuitiv:</u>

Um die Winkelgeschwindigkeit $w = \frac{dj}{dt}$ des rotierenden Massenpunktes zu vergrößern, muß eine Kraft $\vec{F}$ (Kräftepaar!) in tangentialer Richtung (parallel zu $d\vec{r}$) wirken. Außerdem hängt die Wirkung von der Länge des Hebelarms $\vec{r}$ ab. („Kurbel“, Drehen eines Handrades)



<u>Wir vermuten</u>:

Drehmoment M = F•r, genauer:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \qquad (\vec{M} \parallel d\vec{j})$$

Geleistete Arbeit W:

$$W = Mj \qquad \textbf{genauer:} \quad W = \vec{M}\cdot\vec{j}$$

Zusammenhang Drehmoment und Kraft

$$dW = \vec{M} \cdot d\vec{j}$$

(analog:) $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}.$

Mit

$$d\vec{s} = d\vec{j} \times \vec{r}$$

erhält man:

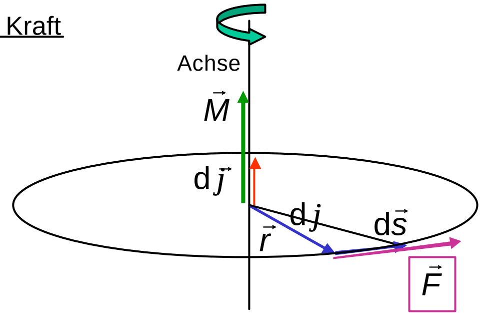
$$dW = \vec{F} \cdot (d\vec{j} \times \vec{r}).$$

Spatprodukt! Es gilt folglich ebenso:

$$dW = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot d\vec{j}$$

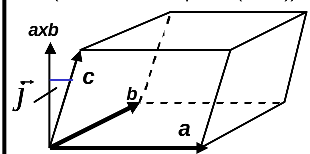
Also:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$



Spatprodukt V:

(Volumen des Spates (a,b,c))



$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a})\vec{b} =$$

$$-(\vec{b} \times \vec{a})\vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{b})\vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{c})\vec{b}.$$

(zyklische Vertauschung)

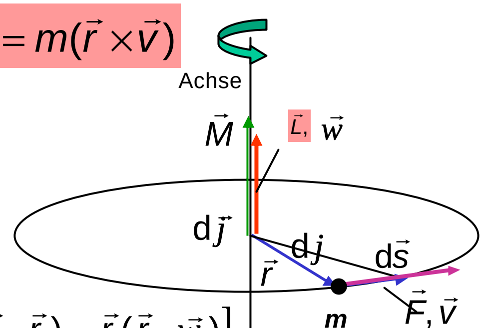
$$V = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = |(\vec{a} \times \vec{b})|\,|\vec{c}\,| \cos j$$

Drehimpuls L einer Punktmasse

Analog zu $\vec{p} = m\vec{v}$: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

(Definition)



Mit $\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}$:

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times (\vec{w} \times \vec{r})) = m\left[\vec{w}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{w})\right]$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2, \quad \vec{r} \cdot \vec{w} = 0, \quad da \quad \vec{r} \perp \vec{w}.$$

$$\vec{L} = mr^2\vec{w}$$

Mit: $J = mr^2$ **wird**

$$\boxed{\vec{L} = J\vec{w}}$$

Beachte: **Dimension von L: kg m²/s. Dimension von Planckscher Konstante h: kg m²/s = J s !**

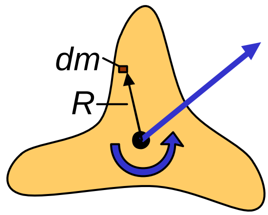
SPIN

Doppeltes Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

(Entwicklungssatz)

Drehimpuls L eines starren Körpers



$$d\vec{L} = dm\,(R^2 \cdot \vec{w}); \qquad dm = r\;dV$$

$$\int_V d\vec{L} = \int_V R^2 r\;\vec{w}\;dV = \vec{w}\cdot r\int_V R^2 dV.$$

Es war: $J = \int_V r\,R^2 \mathrm{d}V.$ Also: $\boxed{\vec{L} = J\cdot\vec{w}.}$

$$E_{rot} = \tfrac{1}{2}\,J\,w^2 = \tfrac{1}{2}\,J\,\vec{w}\cdot\vec{w} \quad \text{(Rotationsenergie)}$$

Ableiten nach der Zeit: $\frac{\mathrm{d}E_{rot}}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2}\,J\,(\dot{\vec{w}}\cdot\vec{w} + \vec{w}\cdot\dot{\vec{w}}) = J\;\dot{\vec{w}}\cdot\vec{w} = J\dot{\vec{w}}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt}.$

$$E_{rot} = \int \underbrace{J\,\dot{\vec{w}}}_{\vec{M}}\cdot\mathrm{d}\vec{j} = J\dot{\vec{w}}\cdot\vec{j} = \vec{M}\cdot\vec{j}. \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{M} = J\,\dot{\vec{w}} = \dot{\vec{L}}.}$$

(Aktionsprinzip für Drehbewegungen)

(Drehung um feste Achse):

Analog zu der Schreibweise des Newtonschen Aktionsprinzips der Translation:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v}$$

ergibt sich für Rotation um feste Achse:

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}\vec{w}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}\vec{w}.$$

Wenn kein äußeres Drehmoment wirkt, bleibt der Drehimpuls erhalten:

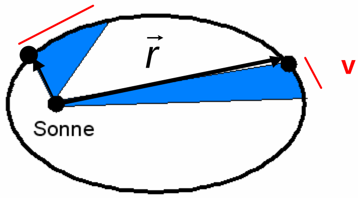
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{L} = \text{const.}$$

(Drehimpulserhaltungssatz)

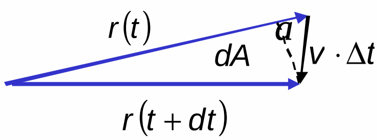
Beispiel zur Drehimpulserhaltung:

Zweites Keplersches Gesetz (Flächensatz):

Der Fahrstrahl Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.



Flächenelement dA der Ellipse wird durch Dreieck angenähert:



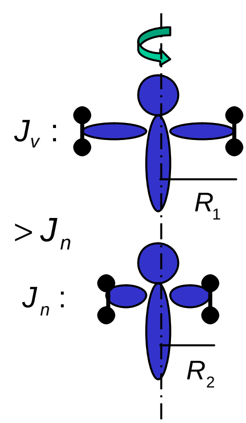
$$dA = \frac{1}{2}\,|\vec{r}| \cdot |\vec{v}\,\Delta t| \cdot \sin a\,.$$

Für ?t ? 0:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|\vec{r}| \cdot |\vec{v}| \sin a\,, \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}|\vec{r} \times \vec{p}| = \frac{1}{2m}\boxed{|\vec{L}| = const.}$$

Versuch zur Drehimpulserhaltung $\vec{L} = J \cdot \vec{w} = const.$: Drehschemel

Wenn J kleiner wird, muss w größer werden.



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = J\frac{d\vec{w}}{dt} + \frac{dJ}{dt}\vec{w} = 0$$

$$\Rightarrow \quad J_v\, w_v = J_n\, w_n \quad \Rightarrow \quad w_n = \frac{J_v}{J_n} w_v\,; \quad J_v > J_n$$

Energiebetrachtung:

$$E_v = \tfrac{1}{2} J_v\, w_v^{\;2} \quad , \quad E_n = \tfrac{1}{2} J_n\, w_n^{\;2}$$

$$\Rightarrow \quad E_n = \tfrac{1}{2} J_n\, w_n^{\;2} = \tfrac{1}{2} J_n \left(\frac{J_v}{J_n} w_v\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad E_n = \frac{J_v}{J_n} E_v :$$ Keine Energieerhaltung!

Verrichtete Arbeit gegen Zentrifugalkraft: $W = \int_{R_1}^{R_2} F_Z\, dR = -\int_{R_1}^{R_2} m w^2 R\, dR$

Analogien zwischen Translations- und Rotationsbewegungen

(Unterschiede: $\vec{F}, \vec{v}, \vec{p}$: polare Vektoren, $\vec{M}, \vec{j}, \vec{w}, \vec{L}$: axiale Vektoren, Symmetrie!)

Translation		Rotation	
Wegelement:	$d\vec{s}$	**Winkelelement:**	$d\vec{j}$
Geschwindigkeit:	$\vec{v}$	**Winkelgeschwindigkeit:**	$\lvert\vec{w}\rvert = \lvert\dot{\vec{j}}\rvert = 2p/T$
Masse:	m	**Trägheitsmoment:**	$J = \int R^2\, dM; \quad dM = r\, dV$
Impuls:	$\vec{p} = m\vec{v}$	**Drehimpuls:**	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = J\vec{w}$
Kraft:	$\vec{F}$	**Drehmoment:**	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Kinetische Energie:	$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}.$	**Kinetische Energie:**	$E = \frac{1}{2}Jw^2 = \frac{L^2}{2J}.$
Newtonsches Aktionsprinzip:	$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \dot{\vec{p}}$	**Aktionsprinzip f. Drehg.:**	$\vec{M} = J \cdot \dot{\vec{w}} = \dot{\vec{L}}$
Arbeit:	$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$	**Arbeit:**	$W = \int \vec{M} \cdot d\vec{j}$
Leistung:	$P \left(= \frac{dW}{dt}\right) = \vec{F} \cdot \vec{v}$	**Leistung:**	$P \left(= \frac{dW}{dt}\right) = \vec{M} \cdot \vec{w}$

Erhaltungssätze:

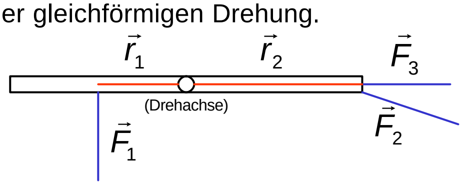
$\vec{p} = const.; E = const.$ für $\sum_i \vec{F}_{a,i} = 0.$

$\vec{L} = const.; E = const.$ für $\sum_i \vec{M}_{a,i} = 0.$

Gleichgewicht:

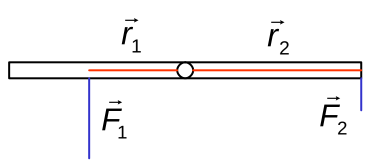
Wenn die Summe aller Drehmomente in Achsrichtung gleich null ist, tritt keine Drehbeschleunigung des Körpers auf. Er verharrt in Ruhe bzgl. einer Drehung oder in einer gleichförmigen Drehung.

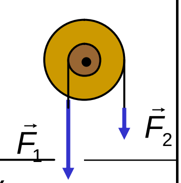
$$\sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$$



Hebel: $\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = -\vec{r}_2 \times \vec{F}_2$

$$r_1 F_1 = r_2 F_2$$



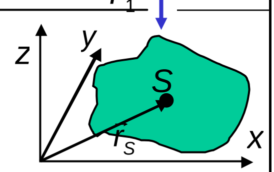


Massenschwerpunkt:

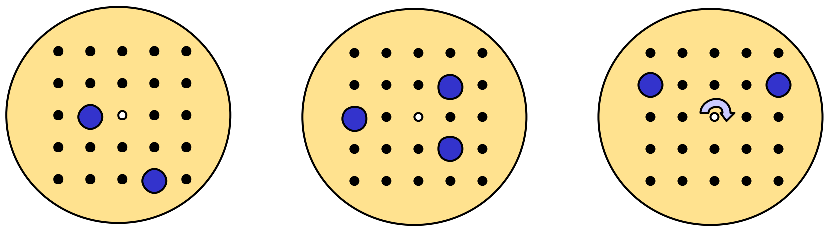
$$M\vec{r}_S - \int_V \vec{r}\, dm = 0.$$

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M}\int_V \vec{r} \cdot dm = \frac{1}{r V}\int_V \vec{r}\ r(\vec{r}) \cdot dV$$

$$\vec{r}_S = \frac{1}{V}\int_V \vec{r} \cdot dV. \quad (r = const.)$$



Versuch: Drehmomente durch Gewichtskraft



(Stabil) (Indifferent) (Labil)

Gleichgewicht, wenn $\Sigma M = 0$.

Gleichgewicht immer dann, wenn Schwerpunkt über/unter Achse.

Stabiles Gleichgewicht: Schwerpunkt unter Achse

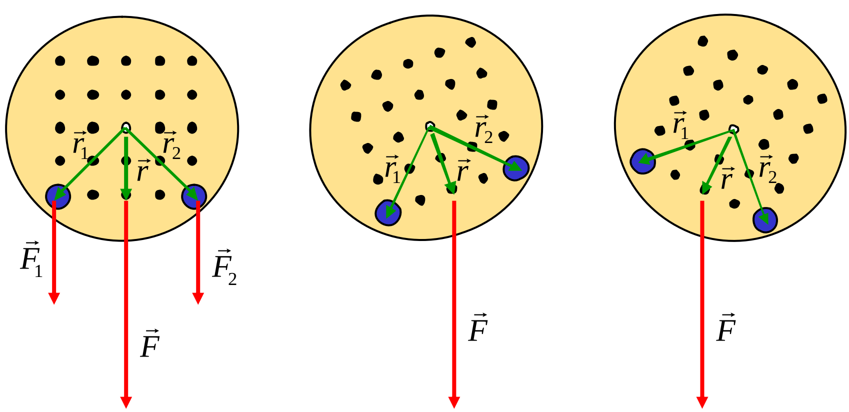
Bei Auslenkung Drehmoment in Richtung zur Gleichgewichtslage

Labiles Gleichgewicht: Schwerpunkt über Achse

Bei Auslenkung Drehmoment weg von der Gleichgewichtslage

Indifferentes Gleichgewicht: Schwerpunkt in Achse.

Stabiles Gleichgewicht



$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \neq 0$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \neq 0$$

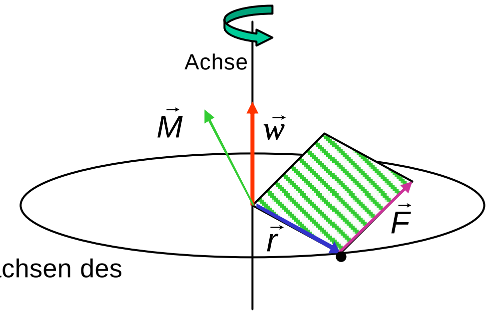
Rotation um freie Achsen

Achse nicht gelagert oder in einem Punkt gelagert (Kreisel)

Das Drehmoment bewirkt
Änderung der Richtung von $\vec{w}$

$(\vec{M} = \dot{\vec{L}} = J\,\dot{\vec{w}})$

Das Trägheitsmoment eines Körpers hängt im allgemeinen von der Richtung der Drehachse bezüglich der Symmetrieachsen des Körpers ab.



Also ändert sich auch das wirksame Trägheitsmoment.

Die Richtungsabhängigkeit des Trägheitsmomentes wird mit einem Tensor (Matrix) beschrieben.

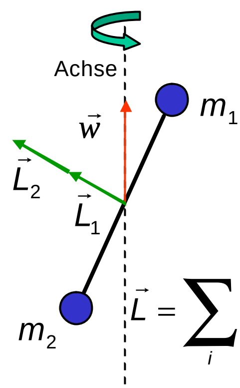
Trägheitstensor: $\tilde{J}$

Im allgemeinen Fall ist der Drehimpuls nicht parallel zur Drehachse.

Man kann zeigen:

$$\boxed{\vec{L} = \tilde{J}\,\vec{w}}$$

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}$$



$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Symmetrischer Tensor 2. Stufe: $J_{xy} = J_{yx}; J_{xz} = J_{zx}; J_{zy} = J_{yz};\ J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} \neq 0.$

Antisymmetrischer Tensor 2.Stufe: $J_{xy} = -J_{yx}; J_{xz} = -J_{zx}; J_{zy} = -J_{yz}; J_{xx} = J_{yy} = J_{zz} = 0.$

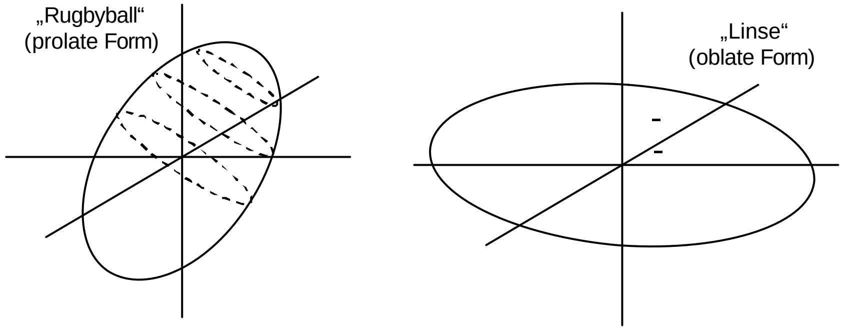
$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix} \bullet \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

(„Zeile mal Spalte“)

$$L_x = J_{xx} w_x + J_{xy} w_y + J_{xz} w_z$$
$$L_y = J_{yx} w_x + J_{yy} w_y + J_{yz} w_z$$
$$L_z = J_{zx} w_x + J_{zy} w_y + J_{zz} w_z$$

Trägheitsellipsoid (Symmetrischer Tensor)

Trägt man $1/\sqrt{J}$ für jede mögliche Achse durch den Schwerpunkt auf, so erhält man ein Ellipsoid. (Ohne Beweis)

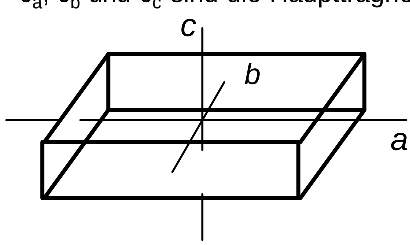


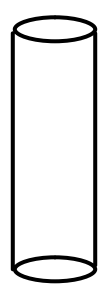
Das Ellipsoid hat drei Hauptachsen (die senkrecht zueinander stehen). Die Trägheitsmomente in diesen Richtungen nennt man „Hauptträgheitsmomente“.

Mit einem kartesischen Koordinatensystem entlang der Hauptachsen ist der Trägheitstensor diagonal:

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} J_a & 0 & 0 \\ 0 & J_b & 0 \\ 0 & 0 & J_c \end{bmatrix}$$

J_a, J_b und J_c sind die Hauptträgheitsmomente.





oblates Trägheitsellipsoid
(größtes J bzgl. senkrechter Achse c)

prolates Trägheitsellipsoid
(kleinstes J bzgl. Zylinderachse)

Freie Achsen

Die eingezeichnete Drehachse kann nur durch Kräfte auf die Achse beibehalten werden, denn

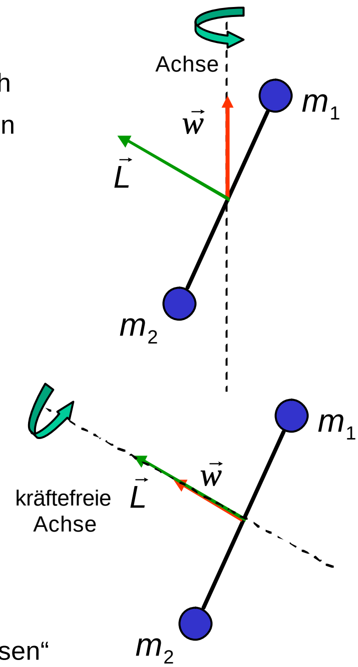
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \neq 0$$

Nach Freigabe der Achse erfolgt die Drehung um die Richtung von $\vec{L}$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0$$

Kräfte wirken nur noch entlang der Stange (innere Radialkräfte).

Auf die Achse wirkt kein Drehmoment.



Solche Achsen bezeichnet man als „freie Achsen"

Freie Achsen

Achsen in Richtung der Hauptachsen des Trägheitsellipsoids sind freie Achsen.

Der Vektor $\vec{w}$ hat nur eine Komponente, z.B.

$$\vec{w} = (0,0,w_c)$$

damit folgt

$$\begin{bmatrix} L_a \\ L_b \\ L_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_a & 0 & 0 \\ 0 & J_b & 0 \\ 0 & 0 & J_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_c \end{bmatrix}$$

also

$$\vec{L} = (0,0,J_c w_c)$$

und damit $\vec{w} \parallel \vec{L}$. Also ist die Achse kräftefrei.

Stabilität freier Achsen

Rotationen um die Achse mit dem größten und mit dem kleinsten Trägheitsmoment sind stabil.
Rotation um die Achse mit dem mittleren Trägheitsmoment ist nicht stabil.
(kleine Störungen führen zum Torkeln).

Versuch: