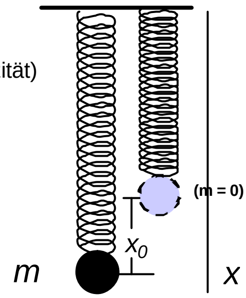
Schwingungen

Schwingungen haben eine zentrale Bedeutung in der Physik.
Der Formalismus wird in sehr vielen Bereichen der Physik verwendet.

A. Freie Schwingungen (Einfachstes Modell einer Anregung in Materie)

Federpendel (ungedämpft): „Harmonischer Oszillator“
Die elastische Kraft einer Feder ist proportional zur Auslenkung: Hookesches Gesetz (vgl. Abschn. Elastizität)



Eindimensional

$$\vec{F} = -D\vec{x}$$ D: Federkonstante

Kräfte, die an der Masse angreifen:

1. Ruhelage:

$$\vec{F}_G + \vec{F}_F = m\vec{g} - D\vec{x}_0 = 0$$

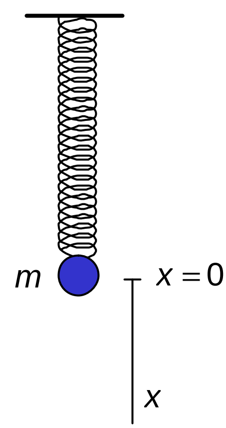
Die Auslenkung x_0 kompensiert die Gewichtskraft.

2. Auslenkung aus Ruhelage:
Man wählt den Nullpunkt von *x* bei der Ruhelage und betrachtet *m* in der Ruhelage als kräftefrei.
Verbleibende Auslenkungen beschleunigen *m*.

$$ma = -Dx$$

$$m\ddot{x}(t) = -Dx(t)$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{D}{m}x(t)$$ Differentialgleichung 2. Ordnung, also 2 Integrationskonstanten.



Versuch, eine Lösung zu finden:
Schwingung ist periodisch, also probieren wir:

$$x(t) = A\sin(wt + j)$$

$$\dot{x}(t) = Aw\cos(wt + j)$$

$$\ddot{x}(t) = -Aw^2\sin(wt + j)$$

Einsetzen: $\left(\ddot{x}(t) = -\frac{D}{m}x(t)\right)$; $\left(\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)\right)$.

$$-A\,\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\frac{D}{m} A \sin(\omega t + \varphi)$$

Ergibt Bestimmungsgleichung für den Parameter ω (Kreisfrequenz):

$$\omega^2 = \frac{D}{m}$$ („Eigenwert“ der Dgl.)

Die Funktion

$$x(t) = A \sin\left(\sqrt{\tfrac{D}{m}}\, t + \varphi\right),$$ (A: Amplitude, φ: Phase der Schwingung)

ist eine Lösung der Differentialgleichung („harmonische Schwingung“).

Die Frequenz der Schwingung ist durch Federkonstante und Masse festgelegt.

Schwingungsdauer T, Frequenz ν:

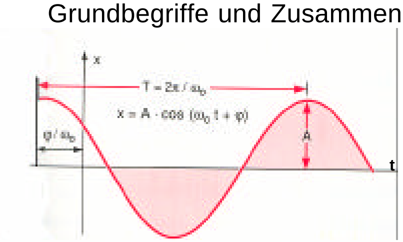
Eine volle Schwingung ist durchlaufen, wenn $\omega T = 2\pi$, also:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}},\quad \omega = 2\pi\nu\,[rad/s];\quad \nu = \frac{1}{T}.$$

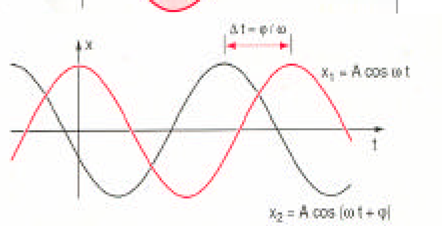
Einheit von ν: 1 s^{-1} = 1 Hertz (Hz)

Heinrich Hertz, 1857-1894

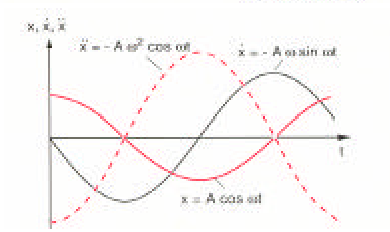
Grundbegriffe und Zusammenhänge bei harmonischen Schwingungen



Schwingungsdauer T, Amplitude A und Phase φ einer harmonischen Schwingung.



Zwei harmonische Schwingungen gleicher Frequenz ω mit einer relativen Phasenverschiebung φ.



Auslenkung x(t), Geschwindigkeit dx/dt, und Beschleunigung d^2x/dt^2 bei einer harmonischen Schwingung.

Potentielle und kinetische Energie bei harmonischen Schwingungen

$$E_{pot}(x) = \int_0^x F\,dx = D\int_0^x x\,dx = \frac{D}{2}x^2; \quad E_{kin} = \frac{m}{2}v^2;$$

$$x = x_0 \sin(w\,t); \quad v = \dot{x} = x_0\, w \cos(w\,t); \quad x_0\, w = v_0.$$

$$E_{pot} = \frac{D}{2}x_0^2 \sin^2(wt); \quad E_{kin} = \frac{m}{2}x_0^2\, w^2 \cos^2(w\,t).$$

Mit $w^2 = \frac{D}{m}$:

$$E_{pot} + E_{kin} = \frac{D}{2}x_0^2 \underbrace{\left(\sin^2(wt) + \cos^2(wt)\right)}_{1} = \frac{D}{2}x_0^2 = \frac{m}{2}v_0^2 = \frac{m}{2}x_0^2 \cdot w^2.$$

Wir berechnen die Mittelwerte von E_{pot} und E_{kin} während einer Periode T:

$$\langle E_{pot}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E_{pot}(t)\,dt = \frac{Dx_0^2}{2T}\int_0^T \sin^2(w\,t)\,dt = \frac{Dx_0^2}{4};$$

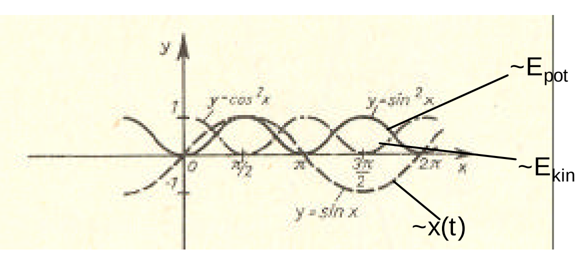
$$\langle E_{kin}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E_{kin}(t)\,dt = \frac{mx_0^2 w^2}{2T}\int_0^T \cos^2(w\,t)\,dt = \frac{mx_0^2 w^2}{4}.$$

Mit $\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(wt)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(wt)\,dt = \frac{1}{2}$ wird:

$$\boxed{\langle E_{pot}\rangle = \langle E_{kin}\rangle} = \frac{Dx_0^2}{4} = \frac{mx_0^2 w^2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}E_{ges}} \qquad \left(\frac{D}{m} = w^2\right)$$

Im zeitlichen Mittel entfällt auf beide Energiearten der gleiche Anteil an der Gesamtenergie (Gleichverteilungssatz).

Zeitlicher Verlauf von E_{pot} und E_{kin}:



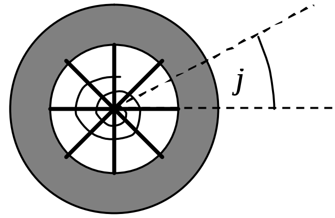
Drehpendel (ungedämpft):

Feder erzeugt ein Drehmoment (D*: Richtmoment)

$$\vec{M} = -D^* \vec{j}$$

proportional zum Drehwinkel

Aktionsprinzip für Drehungen liefert:



$$J\ddot{\vec{j}} = \vec{M} = \dot{\vec{L}}.$$

Daraus ergibt sich die Differentialgleichung:

$$\ddot{\vec{j}} = -\frac{D^*}{J}\vec{j}.$$

Man findet analog zum Federpendel die allgemeine Lösung:

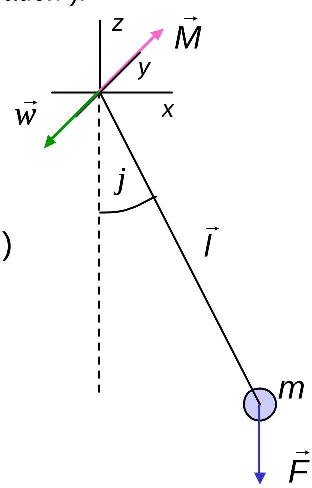
$$j\,(t) = A\sin(\sqrt{\tfrac{D^*}{J}}\,t + a).$$

Fadenpendel (ungedämpft; starrer, masseloser „Faden“):

$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{F}$$

$$\vec{l} = (l \sin j\,,\, 0, -l\cos j\,)$$

$$\vec{F} = (0, 0, -mg)$$



$$\vec{l} \times \vec{F} = (l_y F_z - l_z F_y\,,\; l_z F_x - l_x F_z\,,\; l_x F_y - l_y F_x\,)$$

$$\Rightarrow \vec{M} = (0, mg\,l\sin j\,, 0)$$

Aktionsprinzip:

$$J\dot{\vec{w}} = \vec{M} \qquad \text{mit} \qquad \vec{w} = (0, -\dot{j}\,, 0)$$

$$-J\ddot{j} = mgl\,\sin j \qquad \text{(nur y-Komponente)}$$

Näherung: Punktförmige Masse m: $J = m\,l^2$ (mathematisches Pendel)

$$\boxed{\ddot{j} = -\frac{g}{l}\sin j}$$

Dgl. des mathematischen Pendels

Die Dgl. ist nichtlinear: $\ddot{j} = -\frac{g}{l}\sin j$

Eine Lösung dieser Dgl. kann nicht als einfache Funktion hingeschrieben werden.

Eine Möglichkeit: Differentialgleichung nähern für kleine Auslenkungen:

$$\sin j = j \underbrace{- \tfrac{1}{3!} j^3 + \tfrac{1}{5!} j^5 - \ldots}_{\text{klein für kleine } j} \qquad \text{(Taylorreihe)}$$

Damit ergibt sich:

$$\boxed{\ddot{j} = -\frac{g}{l} j}$$

Ansatz für die Funktionen:

$$j(t) = A\sin(\Omega t + a)$$

$$\dot{j}(t) = A\Omega\cos(\Omega t + a)$$

$$\ddot{j}(t) = -A\Omega^2\sin(\Omega t + a)$$

Einsetzen in Dgl. liefert $\left(\ddot{j} = -\frac{g}{l} j\right)$

$$-A\Omega^2\sin(\Omega t + a) = -\frac{g}{l} A\sin(\Omega t + a).$$

Die Bestimmungsgleichung für die Frequenz lautet:

$$\Omega^2 = \frac{g}{l} \qquad \Rightarrow \qquad T = 2p\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Allgemeine Lösung für kleine Auslenkungen ist also:

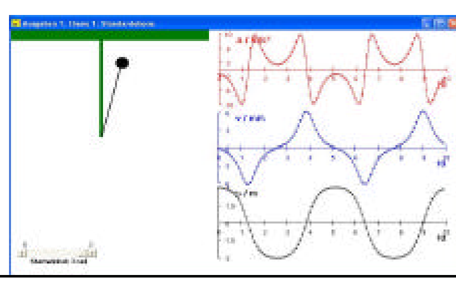
$$j(t) = A\sin\left(\sqrt{\tfrac{g}{l}}\, t + a\right)$$

Amplitude A und Phase α müssen aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Numerische Integration der exakten Dgl.:

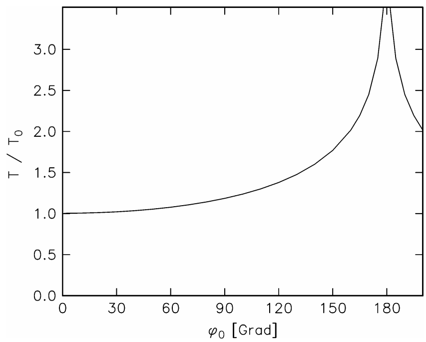
$$\ddot{j} = -\frac{g}{l}\sin j.$$

für die Beschreibung großer Amplituden. Anharmonisches Verhalten.



Schwingungsdauer hängt von der Amplitude ab.
Für kleine Amplituden $\varphi_0 < 5°$ ist die linearisierte Dgl. geeignet.

Schwingungsdauer T des Stabpendels als Funktion der Auslenkung:



T bezogen auf T_0 = Schwingungsdauer bei Amplitude $\rightarrow 0$
Diese Kurve gilt so für jedes Fadenpendel („Stabpendel")

Singularität (Pol) bei φ=180°. Kein Problem: Pendel bleibt aufrecht stehen.

Wenn die Schwingungsdauer von der Auslenkung abhängt, ergeben sich Bewegungen, die nicht sinusförmig sind.
$\rightarrow$ Anharmonische Schwingung

<u>Beispiele:</u>
Mit Laserpulsen Anregung der Elektronen in Festkörpern zu Plasma-Schwingungen:
schwacher Laserpuls ® kleine Amplitude ® harmonische Schwingung
starker Laserpuls ® große Amplitude ® anharmonische Schwingung.

Thermische Ausdehnung in Festkörpern: Bei großen Schwingungs-amplituden der Atome in Festkörpern und Flüssigkeiten (bei hohen Temperaturen) vergrößern sich die mittleren Gleichgewichtsabstände der Atome, weil die Bindungskräfte nichtlinear vom Abstand abhängen: ® Ausdehnung im makroskopischen Maßstab.

Berechnung für Fadenpendel mit ausgedehnter Kugel:

$$\boxed{-J\ddot{j}(t) = mgl\; j\,(t)}$$

(Gleichung gilt für beliebiges J, „Physikalisches Pendel“)

Trägheitsmoment der Kugel: $J = \frac{2}{5} m R^2$

Steinerscher Satz liefert:

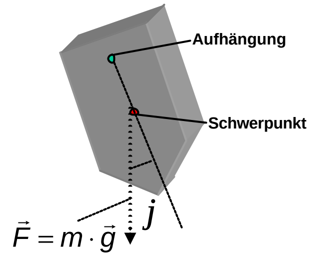
$$J = ml^2 + \tfrac{2}{5} m R^2$$

Es folgt:

$$-(ml^2 + \tfrac{2}{5} m R^2)\,\ddot{j}(t) = mgl\, j\,(t)$$

$$-(1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2})\,\ddot{j}(t) = \frac{g}{l}\, j\,(t)$$

$$\ddot{j}(t) = -\frac{g}{l}\,\frac{1}{1+\frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2}}\, j\,(t)$$



Man erhält die Schwingungsdauer: $T = 2p\sqrt{\frac{l}{g}\left(1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2}\right)}$

Versuch: Bestimmung von g mit Fadenpendel:

Aus der Schwingungsdauer

$$T = 2p\sqrt{\frac{l}{g}\left(1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2}\right)}$$

erhält man

$$g = 4p^2\,\frac{l}{T^2}\left(1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{l^2}\right)$$

Wichtig: kleine Amplituden verwenden

l = (6.000 ± 0.001) m

R = (0.050 ± 0.001) m

T = (4.918 ± 0.001) s

g = (9.7941 ± 0.005) m/s^2

Mathematische Ergänzung am Beispiel des Federpendels:

Komplexer Ansatz zur Lösung der Dgl.

Bisher: Die Bewegung wird vollständig beschrieben durch die Funktion:

$$x(t) = A\sin\left(\sqrt{\tfrac{D}{m}}\,t + j\right) = A\sin(w\,t + j).$$

Jetzt: Behandlung der Dgl. des harmonischen Oszillators in der komplexen (Gaußschen) Zahlenebene:

Komplexe Zahl z = x + i y; $i = \sqrt{-1}; i^2 = -1.$ x = Re(z), y = Im(z).

Re: Realteil, Im: Imaginärteil.

z* = x – iy : Konjugiert komplexe Zahl.

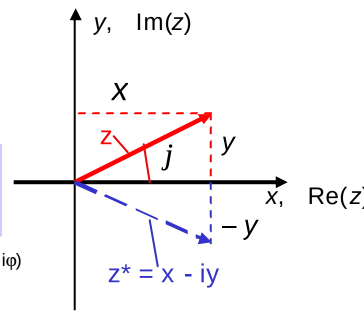
„Eulersche Formeln" (1748):

$$\cos j \pm i \sin j = e^{\pm ij}$$

$$\cos j = \frac{e^{ij} + e^{-ij}}{2}, \quad \sin j = \frac{e^{ij} - e^{-ij}}{2i},$$

(Herleitung beispielsweise über die Entwicklung in Potenzreihen: x ? iφ)

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$



Komplexe Zahlen:

$$\begin{pmatrix} z \\ z^* \end{pmatrix} = x \pm i\,y = R(\cos j \pm i \sin j) = R\,e^{\pm ij}; \quad R = \sqrt{x^2 + y^2}, j = arctg\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$i = e^{i\frac{p}{2}} = e^{-i\frac{3p}{2}}; i^2 = e^{\pm ip} = -1; i^3 = e^{i\frac{3p}{2}} = e^{-i\frac{p}{2}} = -i; i^4 = e^{\pm 2pi} = 1.$$

Addition:

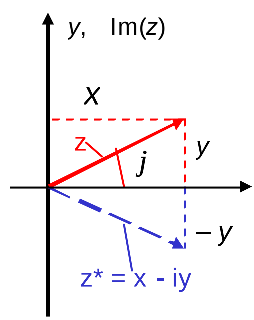
$$(a + ib) + (x + iy) = a + x + i(b + y)$$

Multiplikation:

$$(a + ib)\cdot(x + iy) = ax - by + i(bx + ay)$$

$$r_1\,e^{ij_1} \cdot r_2\,e^{ij_2} = r_1 r_2\,e^{i(j_1 + j_2)}$$

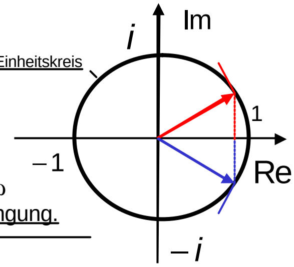
$$z + z^* = 2\,\mathrm{Re}(z); \quad z - z^* = 2\,\mathrm{Im}(z).$$



Die reellen Zahlen sind in der Menge der komplexen Zahlen (Imaginärteil = 0).

Für physikalische Aussagen ist nur der Realteil einer komplexen Zahl maßgebend. Vorsicht bei der Multiplikation von zwei als komplexe Zahlen dargestellten physikalischen Größen!

Wir betrachten die komplexe Funktion

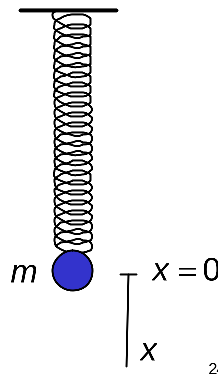


$$\left\{\begin{matrix}\boxed{e^{+iwt}}\\ \boxed{e^{-iwt}}\end{matrix}\right\} = [\ \exp(\ \pm iwt) = \ ]\ \cos(wt) \pm i \sin(wt):$$

Der Einheitskreis wird einmal pro Schwingungsdauer T mit konst. ω durchlaufen. <u>Projektion auf die reelle oder im. Achse: Harm.Schwingung.</u>

Anwendung auf die Dgl. für das Federpendel:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{D}{m} x(t) \cdot$$



Lösungsansatz durch komplexe Funktion (? komplex):

$$\boxed{x(t) = e^{lt},} \qquad \dot{x}(t) = l e^{lt}, \qquad \ddot{x}(t) = l^2 e^{lt}.$$

Einsetzen liefert:

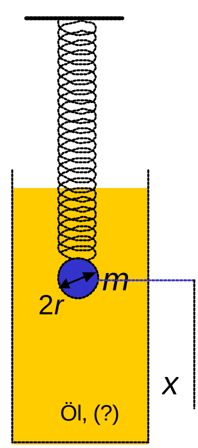
$$l^2 e^{lt} = -\frac{D}{m} e^{lt} \Rightarrow \boxed{l = \pm\sqrt{-\frac{D}{m}} = \pm i w.}$$

<u>Federpendel mit Dämpfung:</u> Gedämpft durch Stokessche Reibung

Dort sind Gewichtskraft und Auftrieb bereits kompensiert.

Weitere Kräfte:

$$\vec{F}_F = -D\vec{x},$$
$$\vec{F}_R = -6p h r \vec{v}.$$



Bewegungsgleichung aus Aktionsprinzip:

$$m\ddot{x}(t) = -Dx(t) - 6p h r\ \dot{x}(t);$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{6p h r}{m}\dot{x}(t) + \frac{D}{m}x(t) = 0.$$

Abkürzung:

$$\ddot{x}(t) + 2g\ \dot{x}(t) + w_0^2 x(t) = 0; \qquad g = 3p h r / m; \quad w_0^{\ 2} = \frac{D}{m}.$$

Ansatz

$$x(t) = Ae^{\lambda t}$$ λ: komplex; A,φ: reelle Amplitude und Phase

$$\dot{x}(t) = A\lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x}(t) = A\lambda^2 e^{\lambda t}$$

Einsetzen:

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + A2\gamma\lambda e^{\lambda t} + A\omega_0^2 e^{\lambda t} = 0.$$

Daraus Bestimmungsgleichung für λ:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

(Reduktion der Lösung der Dgl. auf Lösung der algebraischen („charakteristischen“) Gleichung!)

Quadratische Gleichung mit den Lösungen:

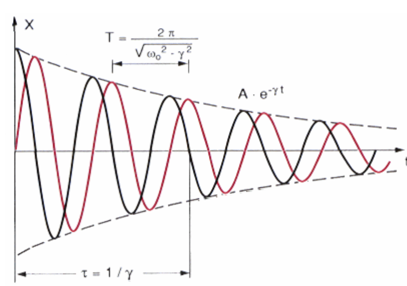
$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

1. Fall: Schwache Dämpfung: $\gamma < \omega_0$

$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$ Radikant ist negativ,

Wurzel wird imaginär. Abkürzung:

$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm i\omega \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



Übergang zum Realteil:

$$x(t) = \tfrac{1}{2} A(e^{-\gamma t + i\omega t} + e^{-\gamma t - i\omega t})$$

$$= Ae^{-\gamma t} \cos \omega t$$

Allgemeine Lösung:

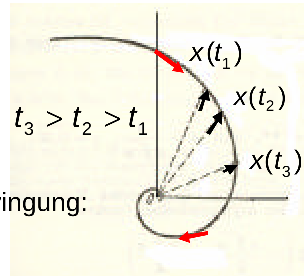
$$x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \varphi)$$

Beachte: Schwingungsfrequenz ω ist dämpfungsabhängig!

Sie nimmt mit wachsender Dämpfung ab.

τ = 1 / γ : Abklingzeit der Schwingungsamplitude auf 1/e, (~37 %).

In der Gaußschen Zahlenebene beschreibt der komplexe Radiusvektor x(t) einer gedämpften Schwingung eine logarithmische Spirale, die sich asymptotisch dem Ursprung nähert.



Gesamtenergie E_{ges} bei einer gedämpften Schwingung:

$$E_{ges.} = \frac{D}{2} x_{max}{}^2 = \frac{D}{2} A^2 \; e^{-\frac{t}{\tau/2}}.$$

E_{ges} klingt mit der halben Zeitkonstanten, d.h. doppelt so schnell ab wie die Amplitude.

Kennzeichnung der Dämpfung eines Schwingungssystems durch Gütefaktor Q:

$$Q = 2\pi \cdot \frac{\text{Gesamtenergie der Schwingung zur Zeit } t}{\text{Energieverlust pro Periode } T \text{ zur Zeit } t} = 2\pi \cdot \frac{E_{ges.}(t)}{\left|\left(\frac{dE_{ges.}}{dt}\right)_t \cdot T\right|}$$

$$Q = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2} = \omega \cdot \frac{\tau}{2}.$$

Beispiele: Drehpendel: Q ≈ 40, Erde (Erdbebenwellen): Q ≈ 250 – 1 500, Saite eines Musikinstrumentes: Q ≈ 10^3, Hohlraumresonator f. Mikrowellen: Q ≈ $10^4 – 10^6$, Elektronen in Atomen: Q ≈ $10^6 – 10^{12}$.

2. Fall: Starke Dämpfung: $\gamma > \omega_0$

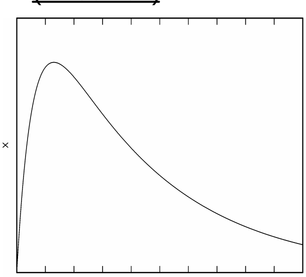
$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

Radikant ist positiv!

Wurzel bleibt reell, d.h. keine periodische Bewegung. Abkürzung:

$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

(Kriechfall)



Allgemeinster Lösungsansatz:

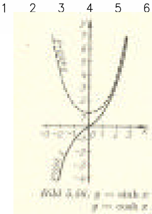
$$x(t) = e^{-\gamma t}\left(A e^{\alpha t} + A^* e^{-\alpha t}\right)$$

Anfangsbedingungen, z.B. x(t=0) = 0; dx/dt (t=0) = v_0.

Daraus: A = -A* = A; 2αA = v_0.

Die Lösung für die spez. Anfangsbedingungen lautet:

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\alpha} e^{-\gamma t} \sinh \alpha t.}$$



$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

<u>3. Fall: Aperiodischer Grenzfall:</u> $\gamma = \omega_0$

$$l_{1/2} = -g \pm \underbrace{\sqrt{g^2 - w_0^2}}_{=0}$$

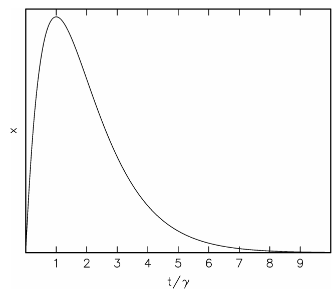
$$l_{1/2} = -g$$

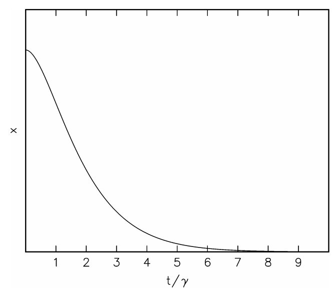
Beide komplexe Lösungen sind entartet.
Man kann zeigen, daß dann die Lösung gegeben ist durch:

$$x(t) = (A + B\,t)e^{-g\,t}$$

A und B lassen sich wieder aus den Anfangsbedingungen bestimmen.

Anwendung in Zeigerinstrumenten, Fahrzeugfederungen (Stoßdämpfer).





<u>B. Erzwungene Schwingungen</u>

<u>Federpendel:</u> periodisch mit Kreisfrequenz O angeregt.
Es wirke eine äußere Kraft:

$$F_A(t) = F_0 \cos\Omega t. \quad i.a.: \Omega \neq w_0$$

Kräftebilanz und Dgl:

$$\ddot{x}(t) + \frac{6p\,h\,r}{m}\dot{x}(t) + \frac{D}{m}x(t) = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t.$$

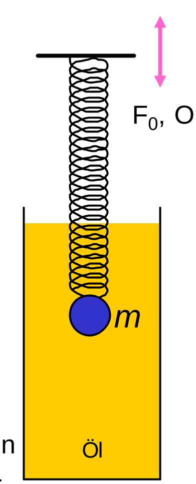
Abkürzungen:

$$\ddot{x}(t) + 2g\,\dot{x}(t) + w_0^2 x(t) = K\cos\Omega t.$$

Übergang ins Komplexe, (x ? z):

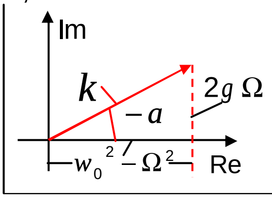
$$\ddot{z} + 2g\,\dot{z} + w_0{}^2 z = K\,e^{i\Omega t}.$$

Die äußere Kraft prägt der Schwingung die Frequenz O auf.
Die Lösung setzt sich aus der allgem. Lösung der homogenen Gleichung (rechte Seite = 0) plus einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen.



Homogene Lösung: Einschwingvorgang (siehe oben). Inhomogene Lösung: Stationärer Zustand, (hier allein behandelt).

Lösungsansatz: $z = A \cdot \exp(i(\Omega t + a))$: $\dot{z} = i\,\Omega z$; $\ddot{z} = -\Omega^2 z$.



Gesucht: A, α.

$$\ddot{z} + 2g\ \dot{z} + w_0{}^2 z = K\ e^{i\Omega t}.$$ Es wird:

$$-\Omega^2 z + 2g\ i\,\Omega z + w_0{}^2 z = K \cdot e^{i\Omega t} \quad \Big| : z$$

$$-\Omega^2 + 2i\,g\ \Omega + w_0{}^2 = \frac{K}{A} e^{-i\,a} = k\ e^{-i\,a}.$$

Multiplikation mit dem konjugiert Komplexen liefert (Betrag)².

$$\left(w_0{}^2 - \Omega^2\right)^2 + (2\,g\ \Omega)^2 = k^2. \quad \Longrightarrow \quad \textit{Amplitude } A: \quad A = \frac{K}{k} = \frac{F_0}{m \cdot k}$$

Amplitude A der erzwungenen Schwingung:

$$\boxed{A = \frac{F_0}{m \cdot \sqrt{\left(w_0{}^2 - \Omega^2\right)^2 + (2\,g\,\Omega)^2}}.}$$

Phase:

$$\boxed{tg\ a = -\frac{2\,g\ \Omega}{\left(w_0{}^2 - \Omega^2\right)}.}$$

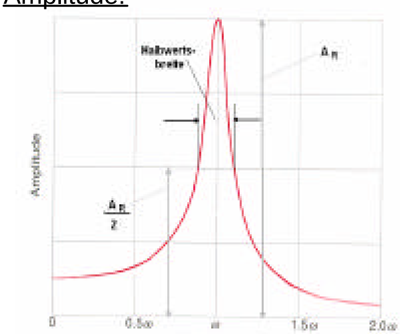
$$A = \frac{F_0}{m \cdot \sqrt{\left(w_0{}^2 - \Omega^2\right)^2 + (2g\ \Omega)^2}}$$

A zeigt eine Resonanz für O? ω$_0$! Bei verschwindender Dämpfung (γ? 0) divergiert A, d.h. A? 8.

Die genaue Resonanzfrequenz ω_R erhält man aus dA/dO = 0 zu:

$$w_R = \sqrt{w_0^2 - 2g^2}.$$

Amplitude:

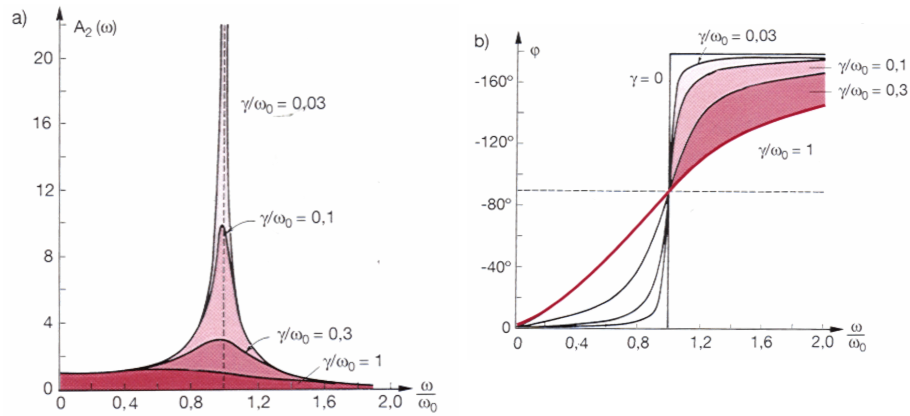


Halbwertsbreite ?ω_{HW}: Breite der Resonanzkurve bei halber Resonanzamplitude. Man findet mit der Näherung $\omega_R = \omega_0$:

$$\boxed{\Delta\,\Omega_{HW} \approx 2\sqrt{3}\,g\ .}$$

Die Halbwertsbreite steigt mit der Dämpfung γ.

- Die Amplitude ist um so größer, je dichter O an ω_0 (Resonanz) liegt.
- Die Resonanz ist umso schmaler, je schwächer die Dämpfung ist.
- Die Phase ändert sich von 0 auf $-\pi$ mit zunehmender Frequenz.
- Die stärkste Phasenänderung ist bei ω_0.
- Der Phasensprung ist um so abrupter, je schwächer die Dämpfung ist.



3. Leistungsaufnahme des Oszillators bei erzwungenen Schwingungen:

Die aus der Anregung aufgenommene momentane Leistung P wird in „Reibungswärme“ umgesetzt.

$$P = \vec{F}_R \cdot \vec{v} = 2g\,m\,v^2 = 2g\,m\,A_2^2\Omega^2 \sin^2(\Omega t + j);$$

$$\vec{F}_R = 6p\,r\,h\,\vec{v};\quad g = 3p\,r\,h/m,\quad v = \dot{x} = A\,\Omega \sin(\Omega t + j).$$

Während einer Periode T umgesetzte Arbeit:

$$W = \int_t^{t+T} P\,\mathrm{d}t = 2g\,m\,A^2\Omega^2 \underbrace{\int_t^{t+T} \sin^2(\Omega t + j)\,\mathrm{d}t}_{=T/2} = g\,mA^2\Omega^2 T.$$

Im zeitlichen Mittel umgesetzte Leistung: $\overline{P} = \dfrac{W}{T} = g\,mA^2\Omega^2.$

Einsetzen von A liefert:

$$\boxed{\overline{P}(\Omega) = \frac{g\,m\Omega^2 K^2}{\left(w_0^{\,2} - \Omega^2\right)^2 + (2g\,\Omega)^2}.}$$

$$\overline{P}(\Omega = w_0) = \overline{P}_{max} = \frac{mK^2}{4g};$$

damit: $$\boxed{\overline{P}(\Omega) = \overline{P}_{max} \cdot \frac{(2g\,\Omega)^2}{\left(w_0^{\,2} - \Omega^2\right)^2 + (2g\,\Omega)^2}.}$$

Für die Halbwertsbreite $\Delta\Omega$ findet man: $\boxed{\Delta\Omega = 2g.}$

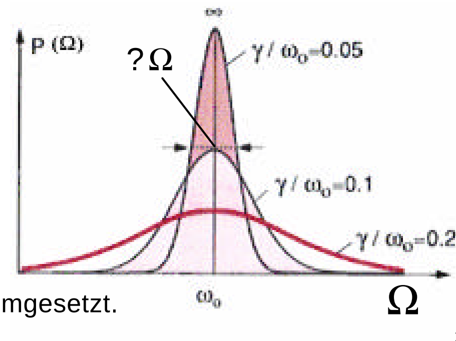
(Möglichkeit zur experimentellen Bestimmung der Dämpfungsgröße von Materieanregungen!)

Für kleine Dämpfung (?Ω << Ω) kann man setzen:

$$w_0^{\,2} - \Omega^2 = (w_0 - \Omega)\cdot(w_0 + \Omega)$$
$$\approx (w_0 - \Omega)\cdot 2\Omega. \quad \textit{Damit}:$$

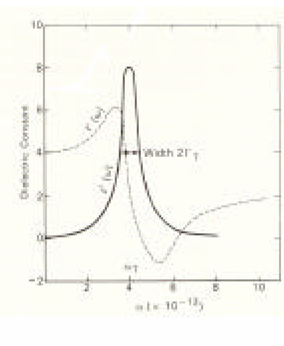
$$\boxed{\overline{P}(\Omega) = \overline{P}_{max} \cdot \frac{g^2}{(w_0 - \Omega)^2 + g^2}}$$

(Lorentzfunktion)

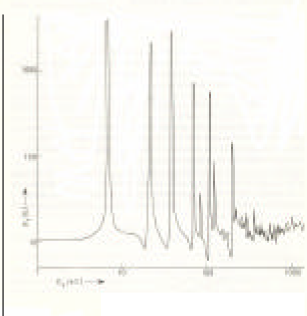


Die größte Leistung wird bei $w = w_0$ umgesetzt.

Beispiele für Materieanregungen

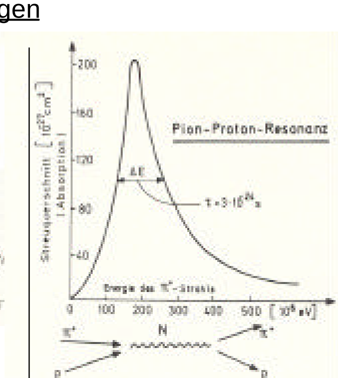


Realteil (e´) und Imaginärteil (e´´) der optischen Dielektrizitätskonstanten e(w) für den polaren Halbleiter GaP im Bereich der optischen Gitterschwingung im infraroten Spektralbereich



Totaler Wirkungsquerschnitt für den Einfang von Neutronen in ^{92}U für Neutronen-Einfangsenergien zwischen 1 eV und 10^3 eV.

Neutronen bestimmter Energien können in den Kern eindringen mit einer gewissen Verweildauer dort, (? Halbwertsbreite).



Resonanzabsorption von p^+-Mesonen (Pionen) mit Energien bis zu 0,5 GeV in Protonen (Wasserstoff). Das angeregte „N-Teilchen“ lebt nur für die Dauer der Flugzeit von p^+ durch das Proton.

(Meson: Schweres Elektron, instabil, $m_{p^+} = 273\, m_{e^-}$).