Mathematik für Physiker I

Skriptum des WS 2001/02

Prof. Dr. M.v.Golitschek

Institut für Angewandte Mathematik und Statistik

Universität Würzburg

WS 2001/02:

Mathematik für Physiker II
Skriptum des SS 2002

Kap. III : Lineare Algebra

Kap. IV : Differential- und Integralrechnung
Funktionen mehrerer reeller Veränderlichen

Kap. V : Vektoranalysis. Integralsätze

Literatur:

Die Anzahl guter Lehrbücher über Analysis und Lineare Algebra wächst und wächst. Es ist für Sie einfach und umsonst, die Bibliothek der Mathematischen Institute im Erdgeschoß aufzusuchen. Im unteren Geschoß, gleich links neben der Treppe ist die **Lehrbuchsammlung Mathematik**.
Unter der Rubrik "Analysis" finden Sie zum Beispiel

1. H. Neunzert, W.G.Eschmann, et. al.: **Analysis 1, Analysis 2**.
   Springer-Verlag 1993.

   Diese beiden Bücher sind einfach zu lesen und decken sorgfältig und ausführlich den Inhalt der Kapitel I - IV meiner Vorlesung ab, insbesondere auch mein Kapitel III über Lineare Algebra.

2. Christian Blatter: **Analysis I, Analysis II**.
   Springer-Verlag 1997, 1995.

   Diese beiden Bände sind ebenfalls einfach und verständlich geschrieben. Sie decken meine Kapitel I, II, IV, V ab, also auch das Kapitel V über Vektoranalysis, aber nicht mein Kapitel III über Lineare Algebra.

Unter der Rubrik "Linearen Algebra" der **Lehrbuchsammlung Mathematik** finden Sie zum Beispiel

Howard Anton: **Lineare Algebra**.
Spektrum, Akademischer Verlag, 1998.

K. Jänisch: **Lineare Algebra**.
Springer-Verlag 2000.

Beide Bücher sind sehr klar und einfach geschrieben und decken mein Kapitel III ab.

G. Berendt, E. Weimar-Woods, Mathematik für Physiker

Kapitel I : Reelle und komplexe Zahlen

§1. Natürliche Zahlen. Beweis durch vollständige Induktion

Die natürlichen Zahlen werden wir durch

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

beschreiben. Wir könnten auch die Beschreibungen $\{I, II, III, IV, \ldots\}$ oder $\{|, ||, |||, ||||, \ldots\}$ wählen. Dies sind äquivalente Darstellungen der natürlichen Zahlen. Dem Mathematiker ist dies zu ungenau. Er ist daran interessiert, welche Struktur die natürlichen Zahlen haben. Deshalb definiert er $\mathbb{N}$ exakt mit Hilfe der folgenden Axiome von **Peano** und kann ruhig schlafen:

(P1) Es gibt ein ausgezeichnetes Element in $\mathbb{N}$, das wir mit $1 \in \mathbb{N}$ bezeichnen;
(P2) zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau einen Nachfolger $n' \in \mathbb{N}$;
(P3) $1 \in \mathbb{N}$ ist kein Nachfolger;
(P4) falls $n \neq m$, dann ist $n' \neq m'$;
(P5) hat $M \subset \mathbb{N}$ die beiden Eigenschaften
(a) $1 \in M$,
(b) ist $n \in M$, so auch $n' \in M$,
dann ist $M = \mathbb{N}$.

Wichtig für Frankreichreisende: In Frankreich ist $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Zweckmäßig für den Alltag ist die Einführung von negativen ganzen Zahlen. Denn hat man 100 Euro auf dem Konto und überweist eine Rechnung von 120 Euro, so ist der Kontostand -20 Euro. Die ganzen Zahlen bezeichnen wir mit

$$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}.$$

Und hier ist bereits meine erste Frage an Sie:

Frage:
Wie kann man mit Hilfe dieser Axiome (P1)-(P5) die **Addition** $+$ so definieren, daß in $K := \mathbf{Z}$ die folgenden **Rechenregeln** (Axiome) gelten?

(A1) $a + b = b + a$, für alle $a, b \in K$ (kommutativ);

(A2) $(a + b) + c = a + (b + c)$, für alle $a, b, c \in K$ (assoziativ);

(A3) es gibt ein Element $0 \in K$ (Nullelement), so daß
$0 + a = a$ für alle $a \in K$;

(A4) zu jedem $a \in K$ gibt es ein $b \in K$, so daß $a + b = 0$.
Ein solches b bezeichnen wir mit $-a$.

Wir definieren die **Subtraktion** " $-$ " in $\mathbf{Z}$ durch $a - b := a + (-b)$.

Frage:

Wie kann man in $K := \mathbf{Z}$ die **Multiplikation** $*$ definieren, so daß die folgenden **Rechenregeln** (Axiome) gelten?

(M1) $a * b = b * a$, für alle $a, b \in K$ (kommutativ)

(M2) $(a * b) * c = a * (b * c)$, für alle $a, b, c \in K$ (assoziativ)

(M3) Es gibt ein Element $e \in K$ (Einselement) mit $e \neq 0$, so daß
$e * a = a$ für alle $a \in K$

In der Folge werden wir meist ab anstelle von $a * b$ schreiben.

Die Axiome von Peano ermöglichen es, durch einen **induktiven Beweis** (= durch **vollständige Induktion**) eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu beweisen. Dieser induktive Beweis besteht aus

- dem Induktionsanfang,
- der Induktionsannahme und
- dem Induktionsschluß.

Beispiel 1. Beweise die Aussage

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{$A(n)$}$$

Dies schreiben wir auch kurz

$$\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2}.$$

Direkter Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
&2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) \\
&= (1 + n) + (2 + \{n-1\}) + (3 + \{n-2\}) + \cdots + (n+1) \\
&= n(n+1).
\end{aligned}$$

Induktiver Beweis:
Es gilt offensichtlich $A(1)$.
Angenommen, es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = n + 1 + \sum_{k=1}^{n} k \ ,$$

und somit bei Verwendung der Induktionsannahme $A(n)$ erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} \ ,$$

woraus

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad ,$$

folgt. Dies ist aber die Aussage $(A(n+1))$. ■

Beispiel 2. Beweise die Aussage

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}\Big(2n^3 + 3n^2 + n\Big). \qquad (A(n))$$

Induktiver Beweis:
Es gilt offensichtlich $A(1)$.
Angenommen, es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad ,$$

und somit bei Verwendung der Induktionsannahme $A(n)$ erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \frac{1}{6}\Big(2n^3 + 3n^2 + n\Big) \quad ,$$

woraus

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6}\Big(2(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + (n+1)\Big) \quad ,$$

folgt. Dies ist aber die Aussage $(A(n+1))$. ■

Beispiel 3 : Lotto.
Es seien k und n natürliche Zahlen, $k \leq n$. Es sei $N(n,k)$ die Anzahl der Möglichkeiten, aus n Elementen k Elemente ohne Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen. Es ist

$$N(n,k) = \binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}.$$

Induktiver Beweis:
Zunächst müssen wir die Aussage $A(n)$ richtig formulieren: Zu $n \in \mathbb{N}$ besagt $A(n)$, daß

$$N(n,k) = \binom{n}{k}, \quad \text{für alle } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Offensichtlich ist $A(1)$ richtig.
Angenommen, es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Für $k = n+1$ ist $N(n+1, n+1) = 1 = \binom{n+1}{n+1}$. Für $k = 1$ ist $N(n+1, 1) = n+1 = \binom{n+1}{1}$.
Sei $k = 2, 3, \ldots, n$. Bei einer Probe unterscheiden wir, ob alle k Elemente in $\{1; 2; \ldots; n\}$ liegen, oder ob eines der Elemente $= n+1$ ist. Folglich ist

$$N(n+1, k) = N(n,k) + N(n, k-1).$$

Nach der Induktionsannahme ist also

$$N(n+1, k) = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

und somit, wie man leicht nachrechnet,

$$N(n+1, k) = \binom{n+1}{k},$$

quod erat demonstrandum. ■

Man kann auch **induktiv definieren**. Zum Beispiel $0! := 1$, $1! := 1$,

$$n! := n * (n-1)! = 1 * 2 * \cdots * n =: \prod_{k=1}^{n} k.$$

Man sagt " n-Fakultät ".
Insbesondere kann man auch schreiben

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots, n$$

und

$$\binom{n}{0} = 1.$$

Beispiel 4 : Binomischer Lehrsatz.
Es sei $n \in \mathbb{N}$, sowie a und b zwei reelle oder komplexe Zahlen. Dann gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Hierbei definieren wir $a^0 = 1$, $b^0 := 1$, selbst wenn $a = 0$ oder $b = 0$, sowie $\binom{n}{0} := 1$.

Induktiver Beweis:
Die Aussage ist richtig für $n = 1$, denn

$$(a+b)^1 = b + a = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0.$$

Sei die Aussage richtig für n. Dann ist sie auch richtig für $n+1$, denn

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} = (a+b) * (a+b)^n &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k},\end{aligned}$$

und nach Umsortieren der Summen folgt hieraus

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k},$$

und somit die Aussage für $n+1$. ■

Definition 1.1.
Eine natürliche Zahl $p > 1$ heißt **Primzahl***, wenn es keine natürlichen Zahlen $p_1 > 1$, $p_2 > 1$ gibt, so daß $p = p_1 p_2$. Zum Beispiel sind $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ Primzahlen.*

Wieviele Primzahlen < 100, < 1000, < 10000, < 30000 gibt es ?

Antwort:
es gibt 25 Primzahlen kleiner als 100,
es gibt 168 Primzahlen kleiner als 1000,
es gibt 1229 Primzahlen kleiner als 10000,
es gibt 3245 Primzahlen kleiner als 30000.

Geschichte:
Erathostenes (276 - 194 B.C), Bibliothekar der großen Bücherei in Alexandria, erfand das Sieb der Primzahlen, auch *Sieb des Erathostenes* genannt. Und so funktioniert es, um die Primzahlen $\leq m$ zu ermitteln:

1. Schreibe die natürlichen Zahlen $\mathbf{Z}_m := \{1, 2, 3, \cdots, m\}$ auf.
2. Kreise die Zahl 2 ein streiche jede 2-te Zahl von $\mathbf{Z}_m$, also $4, 6, 8, \ldots$.
3. Kreise die nächste verbliebene Zahl von $\mathbf{Z}_m$ ein, also die Zahl 3, und streiche alle Vielfachen dieser Zahl.
4. Führe dieses Verfahren in dieser Weise fort. Die kleinste nicht gestrichene Zahl ist stets die nächste Primzahl.
5. Beende dieses Verfahren, sobald die kleinste noch nicht gestrichene Zahl $> \sqrt{m}$ ist. Alle noch nicht gestrichenen Zahlen zwischen $\sqrt{m}$ und m sind Primzahlen.

Unter großen Mühen wurden auf diese Weise auch große Primzahlen gefunden. Im Zeitalter der schnellen Computer finden wir es amüsant, daß D. N. Lehmer im Jahre 1914 eine Liste der Primzahlen $< m = 10^7$ herausgab.

Das kleine Computerprogramm in **Pascal** kann die Primzahlen $< \quad m = 32768$ berechnen.

```
program primzahlen;
const
    n = 1000; { geignet f ür n < 32768 = 2^15}
var
    i, j, k, m          : integer;
    s, max, t           : real;
    prim        : array[0..5000] of integer;
begin
    prim[1]:=2;
    prim[2]:=3;
    j:=2;
    for k := 3 to trunc(n/2) do
    begin
        max:= 0.0;
        m:=2*k-1;
        t:=sqrt(m);
        for i:=1 to j do
        begin
            if (prim[i] > t) then i:=j;       { ( Sieb des E. )}
            s:= m/prim[i];
            s:=s - trunc(s);
            if (s < 1.0E-10) then max:=1.0;
        end;
```

```
        if (max=0.0) then
        begin
            prim[j+1]:=m;
            write(m,' ');
            j:=j+1;
        end;
    end;
    writeln;
    writeln('Anzahl der Primzahlen < ',n,' ist ', j);
end.
```

Bezeichnen wir mit N_m die Anzahl der Primzahlen $< m$, so läßt sich unschwer mit Hilfe des Computerprogramms nachprüfen, daß

$$\frac{N_m * \ln(m)}{m} \quad \approx \quad 1.$$

Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned}
m = 1000 : \qquad & \frac{N_m * \ln(m)}{m} = 1.16 \ , \\
m = 10000 : \qquad & \frac{N_m * \ln(m)}{m} = 1.132 \ , \\
m = 30000 : \qquad & \frac{N_m * \ln(m)}{m} = 1.115 \ .
\end{aligned}$$

§2. Rationale und reelle Zahlen

Will man 4 Kuchen auf 10 Personen gerecht aufteilen, so bekommt jede Person

$$r := \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad \text{Kuchen.}$$

Daher ist für das tägliche Leben die Einführung der **rationalen Zahlen Q** notwendig,

$$\mathbf{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : \ \ p \in \mathbf{Z}, \ \ q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definition 2.1.

1. *Es heißen* $\frac{p_1}{q_1}$ *und* $\frac{p_2}{q_2}$ **gleich**, *wenn* $p_1 q_2 = p_2 q_1$.
2. *Es heißen* $p \in \mathbf{Z}$ *und* $q \in \mathbf{Z}$ **teilerfremd** *(in Zeichen* $(p,q) = 1$, *falls es kein* $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, *gibt, für das* $p = n \ \ p_1$, $q = n \ \ q_1$ *mit* $p_1, q_1 \in \mathbf{Z}$ *richtig ist.*

Wegen Definition 2.1 können wir schreiben

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : \ \ p \in \mathbf{Z}, \ \ q \in \mathbb{N}, \ \ (p,q) = 1 \right\}.$$

Definition 2.2. *In* **Q** *führen wir die Addition und Multiplikation ein:*

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} &:= \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}, \\ \frac{p_1}{q_1} * \frac{p_2}{q_2} &:= \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}. \end{aligned}$$

Die ganzen Zahlen $p \in \mathbf{Z}$ werden durch die Zuordnung $p \to \frac{p}{1}$ in **Q** eingebettet.

Aufgabe : Überprüfen Sie, daß die rationalen Zahlen **Q** mit der Addition und Multiplikation der Definition 2.2 die Axiome (A1)-(A4), (M1)-(M3) für $K := \mathbf{Q}$ besitzen, sowie

(M4) Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es ein $c \in K$, so daß

$$a * c = e.$$

Ein solches c bezeichnen wir mit a^{-1}.

Wir definieren die **Subtraktion** " $-$ " in **Q** durch $a - b \ \ := \ \ a + (-b)$, das heißt durch

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{q_1 q_2}.$$

Wir definieren die **Division** " : " in **Q** durch $a : b \ \ := \ \ a * b^{-1}$, das heißt durch

$$\frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} := \frac{p_1}{q_1} * \frac{q_2}{p_2} = \frac{p_1 q_2}{q_1 p_2}, \quad p_2 \neq 0.$$

Prüfen Sie nach, daß für $K = \mathbf{Q}$ das **Distributivgesetz** gilt:
(D) Für alle Elemente $a, b, c \in K$ gilt

$$(a + b) * c = a * c + b * c. \qquad (Distributivgesetz)$$

Definition 2.3.
Auf einer Menge K mit mindestens 2 Elementen sei eine Addition $+ : K \times K \to K$ und eine Multiplikation $* : K \times K \to K$ definiert. Sind die Axiome (A1)-(A4), (M1)-(M4) und (D) erfüllt, so heißt K ein **Körper** *(bezüglich $+$ und $*$).*

Die ganzen Zahlen bilden also keinen Körper, aber die rationalen Zahlen.

Nach diesem Ausflug in die **Algebra** wollen wir zurückkehren in den Alltag des Rechnens mit rationalen Zahlen.

Dezimaldarstellung rationaler Zahlen = Dezimalbruch

$$\begin{aligned}
\frac{185}{8} &= 23.125 = 2 * 10^1 + 3 * 10^0 + 1 * 10^{-1} + 2 * 10^{-2} + 5 * 10^{-3}, \\
\frac{4}{3} &= 1.3333\cdots = 1.\overline{3}, \\
\frac{111}{11} &= 10.0909\cdots = 10.\overline{09}.
\end{aligned}$$

Satz 2.1. *Jede rationale Zahl läßt sich als endlicher oder periodisch unendlicher Dezimalbruch schreiben. Umgekehrt ist jeder endliche oder periodisch unendliche Dezimalbruch eine rationale Zahl.*

Beweis: Der Beweis beruht auf der Konvergenz geometrischer Reihen, die wir erst später diskutieren.

Dualdarstellung rationaler Zahlen:

$$\begin{aligned}
\frac{185}{8} &= \frac{128 + 32 + 16 + 8 + 1}{8} = \frac{2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^0}{2^3} \\
&= 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^{-3} = LOLLL.OOL, \\
\frac{4}{3} &= L.OLOL\cdots = L.\overline{OL}, \\
\frac{111}{11} &= LOLO.\overline{OOOLOLLLOL}.
\end{aligned}$$

Hier ist ein kleines Computerprogramm in **Pascal** zur Lösung der

Aufgabe: Geben sei eine rationale Zahl x, $0 < x < 1$. Man bestimme ihre Dualdarstellung!

```
program dualbruch;
const
    x = 1/11;
    anzahl = 20;
var
    y           : real;
    k           : integer;
    d           : array[1..anzahl] of char;
begin
    y:=x;
    for k:=1 to anzahl do
    begin
        y:=2*y;
        if (y>=1) then
        begin
            d[k]:='L';
            y:=y-1;
        end
            else
            d[k]:='O';
    end;
    write('x = O.');
    for k:=1 to anzahl do
        write(d[k]);
end.
```

Auf besonderen Wunsch meiner Hörer habe ich das Pascal-Program **dualbruch** exakt in ein **C-Programm** übersetzt:

```
    /* dualbruch.c; */
    #include <stdio.h>
    #include <math.h>
    #include <stdlib.h>
    main(){
        const float x = 1.0/11;
        const int anzahl = 20;
        float y;
        int k;
        char d[100];
```

```
        y = x;
        for (k = 1; k <= anzahl; k++)
            {
                y = 2 * y;
                if (y >= 1)
                {
                    d[k] = 'L';
                    y = y - 1;
                }
                else
                    d[k] = 'O';
            }
    printf("x=O.");
    for (k = 1; k <= anzahl; k++)
        printf("%c", d[k]);
    }
```

Warum braucht man reelle Zahlen? Wenn Sie der Meinung sind, wir brauchen sie nicht, so lösen Sie die folgende

Aufgabe: Welche Seitenlänge hat ein Quadrat der Fläche 2 m^2? Nun, so ungefähr 1.41 m, denn $1.41 * 1.41 = 1.9881$. Aber wenn Sie die Seitenlänge a exakt berechnen wollen, scheitern Sie, denn a ist keine rationale Zahl.
Beweis:
Wäre die Seitenlänge a eine rationale Zahl, dann hätte sie die Darstellung $a = p/q$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ und $(p, q) = 1$. Aus $2 = a^2 = p^2/q^2$ folgt nach unseren Rechenregeln $p^2 = 2 * q^2$. Da $2 * q^2$ eine gerade Zahl ist, ist p^2 ebenfalls eine gerade Zahl, und somit auch p. Also ist $p = 2 * p_1$ für ein $p_1 \in \mathbb{N}$. Dann ist aber $2 * p_1^2 = q^2$. Folglich ist auch q^2 und somit q gerade. Also haben p und q beide den Faktor 2, und es ist nicht $(p, q) = 1$. ■

In der Analysisvorlesung der Mathematiker werden die reellen Zahlen meist eingeführt

(a) durch Dedekindsche Schnitte, oder durch

(b) Intervallschachtelung oder

(c) als **Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen rationaler Zahlen**.
Um die Vertreter der Reinen Mathematischen Lehre zu besänftigen, möchte ich diese dritte Methode kurz beschreiben:
Die Menge aller Cauchyfolgen rationaler Zahlen teilt man in Teilmengen (= Äquivalenzklassen) ein, indem zwei Cauchyfolgen $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ und $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ genau dann in die gleiche Menge $[x] = [y]$ (= Äquivalenzklasse) gesteckt werden, wenn die Folge $(x_n - y_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen Null konvergiert. Nun wird $\mathbb{R}$ definiert als die Menge all dieser Äquivalenzklassen $[x]$. Jede rationale Zahl $q \in \mathbf{Q}$ wird als

die zur konstanten Folge $(q)_{n=1}^{\infty}$ gehörende Äquivalenzklasse angesehen (= in $\mathbb{R}$ eingebettet). Für beliebiges $[x], [y] \in \mathbb{R}$ definiert man die Summe $[x] + [y]$ und das Produkt $[x] * [y]$ als die zu $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ bzw. $(x_n y_n)_{n=1}^{\infty}$ gehörenden Klassen, et cetera, et cetera.

Wir machen uns das Leben viel leichter, indem wir einfacher definieren:

Definition 2.4. *Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bestehen aus allen endlichen oder unendlichen* **Dezimalbrüchen**.

Da sich jede rationale Zahl als endlicher oder periodisch unendlicher Dualbruch darstellen läßt, bestehen die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ aus allen endlichen oder unendlichen **Dualbrüchen**.

Wenn wir später die geometrischen Reihen definieren, werden wir die Definition 2.4 besser verstehen. Für den Augenblick genügt es zu wissen, daß die reellen Zahlen x von der Form

$$x = \pm x_n x_{n-1} \cdots x_0 . x_{-1} x_{-2} x_{-3} \cdots, \quad x_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\},$$

sind, wobei diese Schreibweise bedeutet, daß

$$x = \pm\Big(x_n * 10^n + x_{n-1} * 10^{n-1} + \cdots + x_0 + x_{-1} * 10^{-1} + x_{-2} * 10^{-2} + \cdots\Big).$$

Offensichtlich ist für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$|x - (\pm x_n x_{n-1} \cdots x_0 . x_{-1} x_{-2} \cdots x_{-m})| \leq 10^{-m}.$$

Also läßt sich jede reelle Zahl x beliebig genau durch rationale Zahlen annähern.

Frage: Wie definiert man die Addition und die Multiplikation zweier endlicher oder unendlicher Dezimalbrüche? Überlegen Sie, daß die reellen Zahlen mit dieser Addition und Multiplikation einen Körper bilden, also die Axiome (A1)-(A4), (M1)-(M4), (D) erfüllen.

§3. Komplexe Zahlen

In der theoretischen Physik spielen die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ eine hervorragende Rolle. Durch folgendes Problem wird man schnell zur Einführung der komplexen Zahlen angeregt: Erweitere den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ möglichst einfach zu einem Körper $\mathbb{C}$, in dem die quadratische Gleichung

$$z^2 + 1 = 0$$

eine Lösung besitzt!

Eine Lösung dieses Problems wird gegeben durch

Definition 3.1.

1. *Es besteht $\mathbb{C}$ aus allen Paaren $z = (x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. x heißt Realteil von z, y Imaginärteil von z. Wir schreiben $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$.*
2. Zwei komplexe Zahlen $z_1 = (x_1, y_1)$ und $z_2 = (x_2, y_2)$ heißen gleich, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$.
3. Die **Addition** in $\mathbb{C}$ wird definiert durch

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

4. Die **Multiplikation** in $\mathbb{C}$ wird definiert durch

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

5. Das Element $(0, 1) \in \mathbb{C}$ wird mit i bezeichnet. Anstelle von $z = (x, y)$ schreibt man $z = x + iy$, anstelle von $(x, 0)$ schreibt man x.

Satz 3.1.

1. *Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen Körper mit Nullelement 0 und Einselement 1, das heißt mit $(0, 0)$ und $(1, 0)$.*
2. *Die Zuordnung $x \to (x, 0)$ von $x \in \mathbb{R}$ nach $(x, 0) \in \mathbb{C}$ ist eineindeutig und erhält die Addition und Multiplikation.*
3. *Die Gleichung $z^2 + 1 = 0$ hat in $\mathbb{C}$ die beiden Lösungen $z = \pm i$.*

Beweis. Wir beweisen nur:
Sei $z = x + iy$, $z \neq 0$. Dann ist das inverse Element in (M4)

$z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$. ■

In $\mathbb{C}$ führen wir die Subtraktion ein durch

$$z_1 - z_2 := (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

und die Division (falls $z_2 \neq 0$) durch

$$\begin{aligned} z_1 : z_2 \quad &:= \quad z_1 z_2^{-1} = (x_1 + iy_1)\Big(\frac{x_2 - iy_2}{x_2^2 + y_2^2}\Big) \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i\Big(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\Big). \end{aligned}$$

Desweiteren definieren wir den **Betrag** einer komplexen Zahl $z = x + iy$ durch

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2},$$

und die zu z **konjugiert komplexe** Zahl durch

$$\overline{z} := x - iy.$$

Dann erhalten wir folgende Rechenregeln, die das Rechnen mit komplexen Zahlen sehr erleichtern:

Satz 3.2. *Es seien z, z_1, z_2 komplexe Zahlen. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
&\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \\
&\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}, \\
&\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \\
&\overline{(\overline{z})} = z, \\
&\overline{z} = z \quad \textit{dann und nur dann, wenn} \quad z \in I\!R, \\
&Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \\
&Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = -\frac{i}{2}(z - \overline{z}), \\
&|z| \geq 0 \quad , \quad |z| = 0 \quad \textit{dann und nur dann, wenn} \quad z = 0, \\
&|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \\
&\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \\
&|\overline{z}| = |z|, \\
&|z|^2 = z\overline{z} = \overline{z}z = x^2 + y^2, \quad \textit{für alle } z = x + iy, \\
&|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \\
&||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2|.
\end{aligned}$$

Neben der Darstellung $z = x + iy$ einer komplexen Zahl z ist auch die Darstellung in der $x - y-$Ebene mit aufeinander senkrecht stehenden x- und y-Achsen üblich und nützlich.

Man bezeichnet dann $\mathbb{C}$ als die **Gaußsche Zahlenebene**. Es hat z dann die **Polarkoordinatendarstellung**

$$z = |z|(\cos(\phi) + i\sin(\phi)).$$

Hierbei ist ϕ der Winkel zwischen der x-Achse und der Strecke $\overline{0,z}$, also zum Beispiel $\phi = \pi/2$ für $z = iy$, $y > 0$, oder $\phi = 3\pi/2$ für $z = -iy$, $y > 0$. Natürlich kann man anstelle von ϕ auch $\phi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, nehmen. Im Falle $z = 0$ ist ϕ beliebig wählbar.

Wie man leicht nachrechnen kann, gilt

Satz 3.3. *Es seien z, z_1, z_2 komplexe Zahlen, $z = |z|(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) \neq 0$, $z_1 = |z_1|(\cos(\phi_1) + i\sin(\phi_1))$, $z_2 = |z_2|(\cos(\phi_2) + i\sin(\phi_2)) \neq 0$. Dann ist*

$$\begin{aligned}
z^n &= |z|^n\left(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)\right), \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}, \\
z^{-n} &= |z|^{-n}\left(\cos(n\phi) - i\sin(n\phi)\right), \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}, \\
z_1 z_2 &= |z_1 z_2|\left(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)\right) \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2)\right).
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt die **Formel von Moivre**

$$(\cos(\phi) + i\sin(\phi))^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi) \quad \text{für alle } n \in \mathbf{Z}, \text{ und alle } \phi \in \mathbb{R}.$$

Aus dieser Formel von Moivre folgt sofort, daß für $n \in \mathbb{N}$ die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ (das heißt, die n-ten Einheitswurzeln) gegeben sind durch

$$z_\nu := \cos(2\pi\nu/n) + i\sin(2\pi\nu/n), \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1,$$

oder auch etwas allgemeiner:

Satz 3.4. *Es sei $\zeta = |\zeta|(\cos(\psi) + i\sin(\psi)) \neq 0$, gegeben. Für $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $z^n - \zeta = 0$ die n verschiedenen Lösungen*

$$z_\nu \;:=\; |\zeta|^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2\pi\nu}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2\pi\nu}{n}\right)\right), \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Aber wir können auch allgemeine reelle quadratische Gleichungen

$$z^2 + pz + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

in $\mathbb{C}$ lösen. Denn durch quadratische Ergänzung ist (3.1) äquivalent zu

$$(z + \frac{p}{2})^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Ist also $\Delta := \frac{p^2}{4} - q$ positiv, dann sind die beiden Lösungen z_1 und z_2 reell, nämlich

$$z_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\Delta} \quad , \quad z_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\Delta}.$$

Ist $\Delta = 0$, dann haben wir nur die Lösung $z_1 = z_2 = -\frac{p}{2}$. Ist aber Δ negativ, so erhalten wir die beiden Lösungen

$$z_1 = -\frac{p}{2} + i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \quad , \quad z_2 = -\frac{p}{2} - i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Wir wollen das Kapitel I abschließen mit dem berühmten **Hauptsatz der Algebra**:

> Zu jedem algebraische Polynome
>
> $$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, \tag{3.2}$$
>
> vom Grade n gibt es (bis auf Permutationen eindeutige) komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_n$, so daß
>
> $$P_n(z) = a_n \prod (z - z_k) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$
>
> erfüllt ist.

Aufgabe: Euklidischer Algorithmus. Gegeben seien die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ des algebraischen Polynoms P_n in (3.2). Des weiteren sei eine Nullstelle z_1 von P_n bekannt. Berechne die Koeffizienten $b_0, \ldots, b_{n-1}$ des algebraischen Polynoms

$$P_{n-1}(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_{n-1} z^{n-1},$$

das die Gleichung

$$P_n(z) = (z - z_1) P_{n-1}(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

erfüllt.

Lösung: Es ist

$b_{n-1} := a_n$;
for k:=n-2 downto 0 do
$\quad b_k := z_1 b_{k+1} + a_{k+1}$;

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir die Übungsaufgabe 6 mit einem **Pascal**-Programm und einem **C**-Programm lösen:

6. Bestimmen Sie den Realteil und den Imaginärteil des folgenden Ausdrucks

$$\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} \quad .$$

```
program KomplexeZahlen;
type complex = array[1..2] of real;
var
    za, zm, zd, z, z1, z2, z3, z4 : complex;
procedure complexadd(u,v:complex); { Ergebnis : za }
var s : real;
begin
    za[1] := u[1]+v[1];
    za[2] := u[2]+v[2];
end;
procedure complexmult(u,v:complex); { Ergebnis : zm }
begin
    zm[1]:= u[1]*v[1] - u[2]*v[2];
    zm[2]:= u[1]*v[2] + u[2]*v[1];
end;
procedure complexdiv(u,v:complex); { Ergebnis : zd}
var s : real;
begin
    s:= sqr(v[1])+sqr(v[2]);
    zd[1]:= ( u[1]*v[1] + u[2]*v[2])/s;
    zd[2]:= (-u[1]*v[2] + u[2]*v[1])/s;
end;
begin
    z1[1]:=1; z1[2]:= 2; z2[1]:=3; z2[2]:=-4;
    z3[1]:=2; z3[2]:=-1; z4[1]:=0; z4[2]:=5;
    complexdiv(z1,z2); { = zd }
    z:=zd;
    complexdiv(z3,z4); { = zd }
    complexadd(z ,zd); { = za }
    writeln(za[1]:1:3,'    ',za[2]:1:3);
end.
```

```
/* KomplexeZahlen.c; */
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
typedef float complex[3];
main(){
    complex za, zm, zd, z, z1, z2, z3, z4;
    void complexadd(complex u, complex v)
    {
        za[1] = u[1]+v[1];
        za[2] = u[2]+v[2];
        return;
    }
    void complexmult(complex u, complex v)
    {
        zm[1] = u[1]*v[1] - u[2]*v[2];
        zm[2] = u[2]*v[1] + u[1]*v[2];
        return;
    }
    void complexdiv(complex u, complex v)
    {
        float s;
        s = v[1]*v[1] + v[2]*v[2];
        zd[1] = (u[1]*v[1] + u[2]*v[2])/s;
        zd[2] = ( -u[2]*v[1] + u[1]*v[2])/s;
        return;
    }
    z1[1] = 1.0; z1[2] = 2.0; z2[1] = 3.0; z2[2] =-4.0;
    z3[1] = 2.0; z3[2] =-1.0; z4[1] = 0.0; z4[2] = 5.0;
    complexdiv(z1,z2);
    z[1] = zd[1] ; z[2] = zd[2];
    complexdiv(z3,z4);
    complexadd(z ,zd);
    printf("%1.3f %1.3f \n",za[1],za[2]);
}
```

Kapitel II: Differential- und Integralrechnung
Funktionen einer reellen Variablen

§1. Zahlenfolgen, Konvergenz, Grenzwert

Eine **Zahlenfolge** (oder kurz **Folge**) besteht aus unendlich vielen reellen oder komplexen Zahlen mit genau festgelegter Reihenfolge. Zum Beispiel

$$
\begin{aligned}
&1, 2, 3, 4, \cdots \qquad (k)_{k=1}^{\infty},\\
&0, 1, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots \qquad (k^2)_{k=0}^{\infty},\\
&\Big(\frac{1}{1+k^2}\Big)_{k=-\infty}^{\infty},\\
&(a_n)_{n=1}^{\infty} \quad \text{mit } a_n = (1+\frac{1}{n})^n,\\
&(s_n)_{n=0}^{\infty} \quad \text{mit } s_n = \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{1}{3}\Big)^k.
\end{aligned}
$$

Definition 1.1. (Cauchyfolge)
Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt **Cauchyfolge**, *wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N_ε gibt, die nur von ε und der Folge abhängt, so daß*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } m > N_\varepsilon,\ n > N_\varepsilon. \tag{1.1}$$

Ist (a_n) keine Cauchyfolge, so nennen wir sie **divergent**.

Definition 1.2. (Grenzwert)
Eine Zahl $a \in C$ heißt **Grenzwert** *der Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N_ε^* gibt, die nur von ε und der Folge abhängt, so daß*

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N_\varepsilon^*. \tag{1.2}$$

Wir schreiben dann

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

und sagen:
"Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist **konvergent**", *oder "die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$* **konvergiert gegen** *a".*

Bemerkung: Bei den Definitionen 1.1 und 1.2 ist es gleichgültig, ob es sich um eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ oder $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ oder $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ etc. handelt.

Satz 1.1.
Besitzt eine Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ einen Grenzwert a, so ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge.

2. *Jede reelle oder komplexe Cauchyfolge* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *besitzt einen eindeutigen Grenzwert.*

Beweis:
1. Besitzt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ einen Grenzwert a, so gibt es nach Definition 1.2 zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon^* \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft (1.2). Folglich gilt für alle $m, n > N_\varepsilon^*$

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < 2\varepsilon.$$

Daher ist die Bedingung (1.1) zum Beispiel erfüllt für $N_\varepsilon = N_{\varepsilon/2}^*$.
2. (Indirekter Beweis.)
Es seien a und b Grenzwerte der Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Nach Definition 1.2 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ natürliche Zahlen N_ε^* und $\tilde{N}_\varepsilon^*$, so daß

$$\begin{aligned} |a_n - a| &< \varepsilon \quad \text{für alle } n > N_\varepsilon^*, \\ |a_n - b| &< \varepsilon \quad \text{für alle } n > \tilde{N}_\varepsilon^*. \end{aligned}$$

Dann ist aber

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon \quad \text{für alle } n > \max\{N_\varepsilon^*, \tilde{N}_\varepsilon^*\}.$$

Dies ist aber für beliebig kleine $\varepsilon > 0$ nur möglich, wenn $a = b$ ist.
Der Beweis der Existenz eines Grenzwertes a einer Cauchyfolge folgt aus der Konstruktion der reellen und komplexen Zahlen in Kapitel I. Wir wollen hier aber keinen detaillierten Beweis geben. ∎

Bemerkung:
Da jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ einen Grenzwert besitzt, sagt man :
"$\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind **vollständig** bezüglich des Betrags $|\cdot|$."

Hingegen sind die rationalen Zahlen $\mathbf{Q}$ nicht vollständig, denn es gibt Cauchyfolgen in $\mathbf{Q}$, die in $\mathbf{Q}$ keinen Grenzwert besitzen, zum Beispiel die Folge

$$x_1 := 1 \quad , \quad x_{n+1} := \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.3}$$

die aus rationalen Zahlen besteht und sehr schnell gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Aber wie beweist man dies?

Die durch die Rekursionsformel (1.3) beschriebene Methode nennt man **Babylonisches Wurzelziehen**. Wir können so nicht nur $\sqrt{2}$, sondern $\sqrt{a}$ für irgend ein $a > 0$ berechnen. Nur müssen wir (1.3) ersetzen durch

$$x_1 := 1 \quad , \quad x_{n+1} := \frac{x_n^2 + a}{2x_n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Beweisen Sie: es ist $x_2 > x_3 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots > \sqrt{a}$ und

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Aus dieser Formel erkennen wir die **quadratische Konvergenz** der Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen $\sqrt{a}$.

Bemerkung: (Newton-Verfahren)
Wie wir später sehen werden, ist das Babylonische Wurzelziehen der Spezialfall $f(x) := x^2 - a$ des Newton-Verfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle x^* einer differenzierbaren Funktion f:
Sei x_1 eine Näherung von x^*. Dann berechne die Folge

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Ist $f'(x^*) \neq 0$ und liegt der Startwert x_1 *genügend nahe* bei x^*, so konvergiert die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ **quadratisch** gegen x^*.

Hier ist schon wieder ein kleines **C-Programm**. Es berechnet $\sqrt{a}$ für eine vorgegebene positive Zahl a:

```
/* wurzel.c; */
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<stdlib.h>
main(){
    FILE *datei1;
    const float a=2.0;
    const int n = 8;
    int k ;
    float t=sqrt(2);
    double s=sqrt(2);
    double x[n+2];
    datei1=fopen("wurzel","w");
    x[1]=1.0;
    for (k = 1; k <= n; k++)
        x[k+1]=(x[k]*x[k]+a)/(2.0*x[k]);
    for (k = 1; k <= n + 1; k++)
    {
        printf("x[%d]=     %1.10f\n",k,x[k]);
        fprintf(datei1,"x[%d]=     %1.10f\n",k,x[k]);
    }
    printf("Exakt:     %1.10f     doppelte Genauigkeit\n",s);
    printf("Exakt:     %1.10f     einfache Genauigkeit\n",t);
    fprintf(datei1,"Exakt:     %1.10f     doppelte Genauigkeit\n",s);
    fprintf(datei1,"Exakt:     %1.10f     einfache Genauigkeit\n",t);
    fclose(datei1);
}
```

Nun steht folgendes in der Datei "Wurzel":

```
x[1]= 1.0000000000
x[2]= 1.5000000000
x[3]= 1.4166666667
x[4]= 1.4142156863
x[5]= 1.4142135624
x[6]= 1.4142135624
x[7]= 1.4142135624
x[8]= 1.4142135624
x[9]= 1.4142135624
Exakt: 1.4142135624 doppelte Genauigkeit
Exakt: 1.4142135382 einfache Genauigkeit
```

Aus den beiden letzten Zeilen sieht man, daß in meinem C-Compiler die einfache Genauigkeit für float $t = \sqrt{2}$ nur bis zu 7 Stellen hinter dem Punkt genau ist.

Und hier ist das entsprechende **Pascal-Programm** zur Berechnung von $\sqrt{a}$:

```
program Wurzel;
const
    a = 2.0;
    n = 8;
var
    k       : integer;
    x       : array[1..n+1] of extended;
    datnam      : string[15];
    ausdatei     : text;
begin
    datnam :='wurzel';
    assign(ausdatei,datnam);
    rewrite(ausdatei);
    x[1]:=1.0;
    for k:=1 to n do
      x[k+1]:=(sqr(x[k])+a)/(2*x[k]);
    for k:=1 to n+1 do
    begin
      writeln('x[',k,'] = ',x[k]:1:10);
      writeln(ausdatei, 'x[',k,'] = ',x[k]:1:10);
    end;
    close(ausdatei);
end.
```

Beispiele divergenter und konvergenter Folgen:

1. Die Folge $(k)_{k=0}^{\infty}$ ist divergent.
2. Die Folge $(1/k)_{k=1}^{\infty}$ ist Cauchyfolge und konvergiert gegen $a = 0$.
3. **Geometrische Reihe**
   Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| < 1$. Dann konvergiert die Folge

$$(s_n)_{n=0}^{\infty} \quad \text{mit} \;\; s_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k$$

gegen den Grenzwert $\frac{1}{1-\alpha}$. Wir sagen: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k$ konvergiert gegen $\frac{1}{1-\alpha}$ und schreiben

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}. \tag{1.4}$$

Beweis: Wir rechnen zunächst nach, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$(1-\alpha) \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \;\; = \;\; 1 - \alpha^{n+1}. \tag{1.5}$$

Also ist

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^k \;\; = \;\; \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \quad \text{für alle} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \alpha^{n+1} = 0$ gilt daher (1.4). Diese letzte Aussage wollen wir etwas präziser nachrechnen:
Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir ein N_ε so groß, daß $|\alpha|^{N_\varepsilon} < \varepsilon$.
Dann ist wegen (1.5)

$$\left| \frac{1}{1-\alpha} - \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \right| = \left| \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \right| = \frac{|\alpha|^{n+1}}{|1-\alpha|} < \frac{\varepsilon}{|1-\alpha|} \quad \text{für alle} \;\; n > N_\varepsilon.$$

Um Definition 1.2 exakt nachzuvollziehen, müssen wir noch N_ε geeignet anpassen. Wie dies geht, ist offensichtlich und soll hier und auch in Zukunft unterbleiben.

In den beiden letzten Beispielen hatten wir den großen Vorteil, daß wir den Grenzwert erraten oder leicht bestimmen konnten. Daher konnten wir Definition 1.2 verwenden. Häufig erkennt man den Grenzwert nicht so leicht. Dann verwendet man Definition 1.1 wie im folgenden Beispiel :

4. Die Reihe
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$
ist konvergent. Ihr Grenzwert heißt **Eulersche Zahl**, $e = 2.718281828\ldots$.

Beweis:
Es ist $s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ und somit für $n < m$

$$|s_m - s_n| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}\Big(1 + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots m}\Big),$$

und somit
$$|s_m - s_n| < \frac{2}{(n+1)!} < \frac{1}{n}.$$
Um das Cauchykriterium (1.1) der Definition 1.1 zu erfüllen, müssen wir zu $\varepsilon > 0$ zum Beispiel
$$N_\varepsilon := 1 + [1/\varepsilon]$$
wählen. Hierbei bedeutet $[1/\varepsilon]$ die größte ganze Zahl $\leq 1/\varepsilon$.

Bemerkung:
Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ heißt **Nullfolge**, wenn ihr Grenzwert gleich 0 ist. Sie heißt **beschränkt**, wenn es eine positive Zahl M gibt, so daß

$$|a_n| \leq M \quad \text{für alle } \ n \in \mathbb{N}.$$

Es ist leicht zu zeigen, daß konvergente Folgen beschränkt sind.
Eine dumme Frage: Sind beschränkte Folgen stets konvergent ?

Manchmal bleibt es uns nicht erspart, die Konvergenz von Folgen mit Hilfe der ε-Kriterien (1.1) oder (1.2) zu beweisen. Aber mit zunehmender Erfahrung und Kenntnissen läßt sich diese unangenehme **Epsilontik** meist vermeiden, wenn man die folgenden *Rechenregeln* für konvergente Folgen anwendet.

Satz 1.2.
Es seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergente (reelle oder komplexe) Zahlenfolgen mit den Grenzwerten a und b. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \ ;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b \ ;$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab \ ;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad \textit{falls } b_n \neq 0, \ \ b \neq 0 \ .$$

Beweis: Nur Mut, versuchen Sie, den leichten Beweis dieses Satzes alleine zu führen. ■

Einige wichtige Grenzwerte :

1. Für jede reelle Zahl $\alpha > 0$ ist

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^{1/n} = 1.$$

2. Es sei $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ eine komplexe Zahlenfolge, $z_n = x_n + iy_n$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. Sie ist konvergent genau dann, wenn die Folgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ der Real- und Imaginärteile konvergieren, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i\lim_{n\to\infty} y_n.$$

3. Es gilt sogar

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} n^{-1/n} = 1.$$

Wir wollen nun plausibel machen, daß $n^{1/n}$ gegen 1 konvergiert:
Zunächst sehen wir sofort ein, daß $n^{1/n} > 1$ ist für alle $n \geq 2$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Angenommen, es erfülle $n \geq 2$ die Ungleichung $n^{1/n} \geq 1 + \varepsilon$. Dann ist

$$n \geq (1+\varepsilon)^n \geq 1 + \binom{n}{1}\varepsilon + \binom{n}{2}\varepsilon^2 > \frac{n(n-1)\varepsilon^2}{2},$$

was nur im Falle $n < 1 + 2\varepsilon^{-2}$ möglich ist. ■

§2. Konvergenzkriterien für Folgen

Zum Nachweis der Konvergenz einer Folge reeller oder komplexer Zahlen haben wir bisher kennengelernt:

- das Nachprüfen der Definition 1.2, falls der Grenzwert bereits bekannt ist, oder
- das Nachprüfen der Definition 1.1, falls der Grenzwert unbekannt ist,
- die Verwendung des Satzes 1.2 über Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten von Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, deren Konvergenz oder gar Grenzwerte a und b bereits bekannt sind.

Des weiteren werden wir nun

- das **Monotoniekriterium** und
- das **Einschließungskriterium**

kennenlernen.

Satz 2.1.
Jede monoton steigende, nach oben beschränkte Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist konvergent; ebenso jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge.

Beweis:
Es gelte $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, oder auch nur $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \geq N_0$, ab einem $N_0 \in \mathbb{N}$. Außerdem gebe es ein $M \in \mathbb{R}$, so daß $a_n \leq M$ für alle $n \geq N_0$.
Indirekter Beweis:
Angenommen, diese Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ist keine Cauchyfolge.
Nach Definition 1.1 existiert dann ein $\varepsilon > 0$, für das kein N_ε existiert mit der Eigenschaft

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } \; m > N_\varepsilon, n > N_\varepsilon .$$

Für dieses $\varepsilon > 0$ gibt es also unendlich viele Indexpaare (m_k, n_k), $k \in \mathbb{N}$, so daß

$$n_1 < m_1 \leq n_2 < m_2 \leq n_3 < m_3 \leq \cdots$$

und

$$|a_{m_k} - a_{n_k}| \geq \varepsilon \quad , \quad k \in \mathbb{N}.$$

Wegen der Monotonie der Folge ist dann aber für alle $j \in \mathbb{N}$

$$a_{m_j} = a_{m_j} - a_{n_j} + a_{n_j} \geq \varepsilon + a_{n_j} \geq \varepsilon + a_{m_{j-1}} \geq \cdots \geq (j-1)\varepsilon + a_{m_1}.$$

Lassen wir j gegen ∞ gehen, so folgt $\lim a_{m_j} = \infty$, was der Beschränktheit der Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ widerspricht. Dieser Widerspruch beweist, daß unsere Annahme falsch ist. Folglich ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge. Wie wir bereits in §1 argumentiert haben (Satz 1.1), besitzt jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ einen eindeutigen Grenzwert. $\blacksquare$

Satz 2.2.
Es seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ zwei reelle konvergente Folgen, wobei

$$a_n \leq b_n \quad \textit{für alle } n \geq N_0.$$

1. *Dann ist*
$$\lim_{n\to\infty} a_n \;\leq\; \lim_{n\to\infty} b_n.$$
2. *Gilt sogar $a := lim_{n\to\infty} a_n \;=\; \lim_{n\to\infty} b_n$, so konvergiert jede Folge $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ ebenso gegen a, falls sie die Bedingungen*
$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \textit{für alle } n \geq N_0$$
erfüllt.

Beweis:
Wende die Definition 1.2 der Konvergenz an. ■

Beispiele:

1. Die **Eulersche Zahl** $e = 2.718281828\ldots$ ist definiert als Grenzwert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Es gilt aber auch
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \;=\; e \;.$$
Diese Folge ist monoton wachsend und beschränkt.
Die Beschränktheit der Folge erkennen wir aus dem binomischen Satz : Es ist
$$\begin{aligned} a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^{n-k} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!}\frac{(n-1)(n-2)}{n\cdot n} + \cdots + \frac{1}{n!} \end{aligned} \tag{2.1}$$
und somit
$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$
und somit $a_n < e$. Um die Monotonie zu erkennen, schreiben wir
$$a_{n+1} := \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n}{n+1} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)}{(n+1)(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}$$
und vergleichen diese Summanden von a_{n+1} mit denen in (2.1).

Das Monotoniekriterium des Satzes 2.1 liefert nun die Konvergenz der Folge. Den Grenzwert e ersehen wir, wenn wir in (2.1) n gegen ∞ laufen lassen.

2. Mit Hilfe von Satz 1.2 können wir die Grenzwerte recht *wilder* Folgen ausrechnen: Wir erkennen sofort, daß für $k \in \mathbb{N}$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0.$$
Dann ist für vorgegebene reelle oder komplexe Zahlen a_k, b_k, $k = 0, 1, \ldots, 5$,
$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_5 n^5}{b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \cdots + b_5 n^5} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^{-5} + a_1 n^{-4} + a_2 n^{-3} + \cdots + a_5}{b_0 n^{-5} + b_1 n^{-4} + b_2 n^{-3} + \cdots + b_5} \\ &= \begin{cases} \frac{a_5}{b_5}, & \text{falls } b_5 \neq 0, \\ \\ +\infty, & \text{falls } a_5 > 0,\ b_5 = 0,\ b_4 > 0\ . \end{cases} \end{aligned}$$

3. Es sei $a_0 > 0$ vorgegeben, sowie die Rekursionsformel
$$a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 9}{5a_n + 3}, \quad n = 0, 1, \ldots.$$
Wir erkennen sofort, daß alle a_n positiv sind und nach oben beschränkt sind. Es ist nicht sofort zu sehen, daß die Folge konvergiert. Falls sie aber konvergiert, so muß der Grenzwert a die Gleichung
$$a = \frac{a^2 + 9}{5a + 3}$$
erfüllen. Also wäre $a = \frac{3}{8}(\sqrt{17} - 1)$. Variieren Sie das C-Programm "wurzel.c", um die Konvergenz mit Startwert $a_0 = 1$ zu bestätigen. Beachten Sie, daß die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ nur langsam gegen a konvergiert.

4. Und zum Schluß eine **harte Nuß**:
Eine Folge komplexer Zahlen $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ soll die Rekursionsformel
$$z_{k+2} - 2z_{k+1} + 2z_k = 1, \quad k \in \mathbb{N},$$
erfüllen. Bestimmen Sie alle Anfangswerte (z_1, z_2), für die die Folge konvergiert !
Ergebnis: Nur die Startwerte $z_1 = z_2 = 1$ führen zu einer konvergenten Folge, nämlich zu $z_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

§3. Unendliche Reihen

Definition 3.1.
Es sei $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ *eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Setze*

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Wir nennen die Zahlenfolge $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ *eine (unendliche)* **Reihe**, *und* s_n *heißt die* n**-te Partialsumme** *der Reihe.*

Wir sprechen "von der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ".

Definition 3.2.
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *heißt konvergent mit* **Wert** *oder* **Summe** s *und schreiben*

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ ,$$

falls die Folge $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ *gegen* s *konvergiert.*

Beispiele:

1. **Geometrische Reihe**
   Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist
   $$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad = \quad \frac{1}{1-z}.$$
2. **Reihendarstellung von e:**
   Es ist
   $$e \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad = \quad 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots .$$
3. **Harmonische Reihe:**
   Die Reihe
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$
   divergiert (gegen $+\infty$).
   Beweis von 3.: Es ist für jedes $n \in \mathbb{N}$
   $$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Folglich ist die Folge $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ der Partialsummen keine Cauchyfolge; die harmonische Reihe ist divergent und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Eine notwendige Bedingung an konvergente Reihen gibt der folgende einfache Satz wieder:

Satz 3.1.
Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, so ist die Folge $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ eine Nullfolge.

Beweis:
Nach Definition 3.2 ist die Folge $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchyfolge. Dies bedeutet nach Definition 1.1, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N_ε gibt, die nur von ε und der Folge abhängt, so daß

$$|s_n - s_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } m > N_\varepsilon,\ \ n > N_\varepsilon.$$

Setzen wir die Definition von s_n und s_m ein, so wird für $m > n$

$$|\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \varepsilon \quad \text{für alle } m > N_\varepsilon,\ \ n > N_\varepsilon.$$

Insbesondere für $m = n + 1$ ist

$$|a_{n+1}| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N_\varepsilon.$$

Aber dies ist die Bedingung der Definition 1.2 für eine Nullfolge . ■

Aber aufgepaßt: Bei der harmonischen Reihe ist die Folge $a_k = \frac{1}{k}$ eine Nullfolge, aber die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert .

Manchmal kann man mit dem folgenden Satz die Konvergenz von Reihen nachweisen:

Satz 3.2. Leibnizsches Konvergenzkriterium.
Hat die Folge $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ folgende Eigenschaften
(a) $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ *ist Nullfolge,*
(b) $|a_{k+1}| \leq |a_k|$ *für alle* $k \geq N_0$, *ab einem* $N_0 \in \mathbb{N}$,
(c) $a_{k+1} a_k < 0$ *für alle* $k \geq N_0$.

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Beweis:
Wir prüfen das Konvergenzkriterium der Definition 1.1 nach: Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir N_ε so groß, daß $N_\varepsilon > N_0$, sowie $|a_k| < \varepsilon$ für alle $k > N_\varepsilon$ erfüllt ist. Dann ist für alle $N_\varepsilon < n < m$

$$\Big|\sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k\Big| = \Big|a_{n+1} + \cdots + a_m\Big| \leq |a_{n+1}| < \varepsilon.$$

Nach Definition 1.1 ist die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchyfolge. ■

Beispiel:
Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

konvergiert, und zwar gegen $\ln 2 = 0.69314718\ldots$ (**ln** = natürlicher Logarithmus).

Nützlich ist die folgende Rechenregel für konvergente Reihen:

Satz 3.3.
Seien $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $d = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen. Dann ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\alpha a_k + \beta b_k\Big) \quad , \quad \alpha, \beta \in C,$$

konvergent und hat die Summe $\alpha s + \beta d$.

Beweis: Dies können Sie doch alleine, oder ? ■

Viele Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sind sogar **absolut konvergent**. Dies bedeutet, daß die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert. Leicht sehen Sie ein, daß gilt:

Satz 3.4.
Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent, und es gilt

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

Beweis: Dies können Sie doch auch alleine, oder ? Sie müssen nur anwenden, daß für beliebige $m > n$

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| = \Big|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m\Big| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m|$$

erfüllt ist. ■

Aber die Umkehrung des Satzes 3.4 ist nicht immer richtig. Zum Beispiel konvergiert die Reihe
$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \ln 2$, aber die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.

Insbesondere bei den Potenzreihen werden die drei folgenden Kriterien

- das Majorantenkriterium,
- das Quotientenkriterium,
- das Wurzelkriterium,

einfache Hilfsmittel sein, um schnell die **absolute Konvergenz** einer Reihe zu beweisen.

Satz 3.5. Majorantenkriterium
Besitzt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *eine konvergente* **Majorante** $s = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$, *das heißt mit der Eigenschaft*

$$|a_k| \leq b_k \quad , \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\},$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut, und es ist*

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq s. \tag{3.1}$$

Beweis:
Die Folge $s_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$, $n \in \mathbb{N}$, ist monoton steigend und durch s nach oben beschränkt. Nach Satz 2.1 ist diese Folge konvergent. Nach Definition 3.2 konvergiert somit die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, und nach Satz 3.4 auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. ■

Satz 3.6. Quotientenkriterium
Für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *gebe es eine natürliche Zahl* N *und eine positive Zahl* $M < 1$, *so daß*

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq M \quad \text{für alle } k \geq N \tag{3.2}$$

erfüllt ist. Dann ist die Reihe absolut konvergent.

Satz 3.7. Wurzelkriterium
Für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *gebe es eine natürliche Zahl* N *und eine positive Zahl* $M < 1$, *so daß*

$$|a_k|^{1/k} \leq M \quad \text{für alle } k \geq N \tag{3.3}$$

erfüllt ist. Dann ist die Reihe absolut konvergent.

Beweis von Satz 3.6 und 3.7:
Wir benutzen das Majorantenkriterium (Satz 3.5) und die Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} M^k = \frac{1}{1-M}$ für $0 < M < 1$. Prüfen Sie nach, daß in Satz 3.6 eine konvergente Majorante gegeben ist durch

$$b_k := |a_k|, \quad k = 0, \ldots, N, \quad b_k := M^{k-N} |a_N|, \;\; k > N,$$

und in Satz 3.7 durch

$$b_k := |a_k|, \quad k = 0, \ldots, N-1, \quad b_k := M^k, \;\; k \geq N.$$

■

In Satz 3.7 tauchen die Zahlen $|a_k|^{1/k}$ auf. Deren Definition ist klar: Für $a_k \neq 0$ ist $\beta_k := |a_k|^{1/k}$ die positive Zahl, die die Gleichung $\beta_k^k = |a_k|$ erfüllt. Aber wie berechnet man β_k? Wie wir später sehen werden, am einfachsten nach der Formel

$$|a_k|^{1/k} = \exp\left(\frac{1}{k} \ln |a_k| \right),$$

also mit Hilfe der Exponentialfunktion exp und dem (natürlichen) Logarithmus ln.

Beispiele:

1. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha z^k$ **konvergiert absolut** für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$. (Die Definition von k^α für $\alpha \notin \mathbf{Q}$ wird erst später in der Vorlesung gebracht). Den Beweis führen wir mit dem Quotientenkriterium, denn es gilt

$$\frac{(k+1)^\alpha |z^{k+1}|}{k^\alpha |z^k|} = \frac{(k+1)^\alpha}{k^\alpha} |z|.$$

Ist $\alpha \leq 0$, dann folgt

$$\frac{(k+1)^\alpha |z^{k+1}|}{k^\alpha |z^k|} \leq |z|, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

und wir können in Satz 3.6 $M = |z|$ und $N = 1$ wählen. Ist $\alpha > 0$, so können wir wegen

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(k+1)^\alpha}{k^\alpha} = 1$$

und $|z|^{-1/2} > 1$ die Zahl $N \in \mathbb{N}$ so groß wählen, daß

$$\frac{(k+1)^\alpha}{k^\alpha} \leq |z|^{-1/2} \quad \text{für alle } k \geq N$$

erfüllt ist. Dann ist

$$\frac{(k+1)^\alpha |z^{k+1}|}{k^\alpha |z^k|} \leq \frac{(k+1)^\alpha}{k^\alpha} |z| \leq |z|^{1/2} \quad \text{für alle } k \geq N.$$

Also gilt das Quotientenkriterium für $M = |z|^{1/2}$. ■

2. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \tag{3.4}$$

konvergiert für alle $z \in \mathbf{C}$ absolut. Um das Quotientenkriterium anzuwenden, betrachten wir die Quotienten

$$\frac{|z^{k+1}|}{(k+1)!} : \frac{|z^k|}{k!} = \frac{|z|}{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Wählen wir $N \in \mathbb{N}$ so groß, daß $N \geq 2|z|$ ist, so wird

$$\frac{|z^{k+1}|}{(k+1)!} : \frac{|z^k|}{k!} \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } k \geq N;$$

und das Quotientenkriterium ist erfüllt für dieses N und $M = 1/2$.
Später werden wir die Summe in (3.4) die **Exponentialfunktion** nennen,

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \tag{3.5}$$

Anstelle von $\exp(z)$ schreibt man auch e^z.

Manchmal muß man zwei Reihen mit einander multiplizieren. Dann ist der folgende Satz sehr hilfreich.

Satz 3.8. Cauchysches Produkt zweier Reihen.
Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen, so ist deren **Cauchysches Produkt**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0\Big) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \cdots \tag{3.6}$$

ebenfalls absolut konvergent. Für die Grenzwerte gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right). \tag{3.7}$$

Beweis:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}
\rho_n &:= \sum_{k=0}^{n} |a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \Big(|a_0||b_k| + |a_1||b_{k-1}| + \cdots + |a_k||b_0|\Big) \\
&\leq \Big(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} |b_k|\Big) \\
&\leq \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\Big).
\end{aligned}$$

Dies beweist, daß die Folge $(\rho_n)_{n=0}^{\infty}$ nach oben beschränkt ist. Da sie monoton wachsend ist, konvergiert sie nach Satz 2.1. Folglich ist das Cauchysche Produkt (3.6) absolut konvergent, und konvergiert deshalb nach Satz 3.4.

Um (3.7) zu beweisen, betrachten wir für $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
&\left| \Big(\sum_{k=0}^{2n} a_k \Big) \Big(\sum_{k=0}^{2n} b_k \Big) - \sum_{k=0}^{2n} (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0) \right| \\
&= |a_1 b_{2n} + a_2 (b_{2n} + b_{2n-1}) + \cdots + a_{2n} (b_{2n} + b_{2n-1} + \cdots + b_0)| \\
&\le |a_1||b_{2n}| + |a_2|(|b_{2n}| + |b_{2n-1}|) + \cdots + |a_{2n}|(|b_{2n}| + |b_{2n-1}| + \cdots + |b_0|) \\
&\le \left| \Big(\sum_{k=0}^{2n} |a_k| \Big) \Big(\sum_{k=0}^{2n} |b_k| \Big) \; - \; \Big(\sum_{k=0}^{n} |a_k| \Big) \Big(\sum_{k=0}^{n} |b_k| \Big) \right| ,
\end{aligned}
$$

und die letzte Zeile konvergiert gegen 0 für $n \to \infty$. ■

Wichtige Anwendung: Produkte von Potenzreihen :
Als bedeutendes Beispiel betrachten wir die beiden in $\mathbb{C}$ absolut konvergenten Potenzreihen

$$C(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \quad , \quad S(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Später werden wir $\cos(z)$ (Kosinus) anstelle von $C(z)$ und $\sin(z)$ (Sinus) anstelle von $S(z)$ schreiben.
Wenden wir für festes $z \in \mathbb{C}$ den Satz 3.8 an für $a_k = \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$ und $b_k = \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$, dann ist $a_0 b_0 = z$, und für $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
a_0 b_k + \cdots + a_k b_0 = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} &= \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j z^{2j}}{(2j)!} \frac{(-1)^{k-j} z^{2k+1-2j}}{(2k+1-2j)!} \\
&= (-1)^k z^{2k+1} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{(2j)!} \frac{1}{(2k+1-2j)!} \\
&= \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \sum_{j=0}^{k} \frac{(2k+1)!}{(2j)!(2k+1-2j)!} \\
&= \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j+1} = \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{2^{2k+1}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(-1)^k (2z)^{2k+1}}{(2k+1)!}.
\end{aligned}$$

Also haben wir die Funktionalgleichung

$$S(2z) = 2S(z)C(z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{3.8}$$

bewiesen.

§4. Teilfolgen. Satz von Bolzano und Weierstrass

Definition.
Sei $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$ eine unendliche Folge natürlicher Zahlen, so heißt die Folge $(a_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ eine **Teilfolge** *der Folge $(a_k)_{k=1}^{\infty}$.*

Satz 4.1.
Jede Teilfolge einer konvergenten Zahlenfolge ist ebenfalls konvergent und hat denselben Grenzwert.

Beweis:
Dies folgt direkt aus den ε-Kriterien der Definitionen 1.1 oder 1.2. ■

Satz 4.2. Auswahlsatz von Bolzano und Weierstraß
Jede beschränkte reelle Zahlenfolge $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ enthält mindestens eine konvergente Teilfolge.

Beweis:
Es seien b_0 und c_0 untere bzw. obere Schranken der Folge $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, das heißt, $b_0 \leq a_k \leq c_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Für $k = 1, 2, 3, \ldots$ konstruieren wir sukzessive die Teilintervalle $[b_k, c_k]$ wie folgt:
(a) Setze $d_k := (b_{k-1} + c_{k-1})/2$ und zerlege $[b_{k-1}, c_{k-1}]$ in die beiden Teilintervalle $[b_{k-1}, d_k]$ und $[d_k, c_{k-1}]$.
(b) Enthält $[b_{k-1}, d_k]$ unendlich viele Elemente der Folge $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, so setze $[b_k, c_k] := [b_{k-1}, d_k]$, ansonsten $[b_k, c_k] := [d_k, c_{k-1}]$.
Wähle nun die Teilfolge $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ so aus, daß a_{n_k} in $[b_k, c_k]$ liegt und $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$ erfüllt. Jetzt können Sie sicher selbst beweisen, daß $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge ist.

Definition.
Eine Zahl $c \in C$ heißt **Häufungspunkt** *der Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, wenn es eine konvergente Teilfolge gibt mit Grenzwert c.*

Der interessierte Leser kann den folgenden Satz sicher sofort beweisen:

Satz 4.3.
Jede beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ besitzt einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt.
In Zeichen:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \qquad \text{"Limes superior"}$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \qquad \text{"Limes inferior".}$$

Sie können sich auch selbst schnell überlegen, daß aus den Quotientenkriterien des Satzes 3.6 und dem Wurzelkriterium des Satzes 3.7 der folgende Satz sofort folgt:

Satz 4.4.
Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *ist* **absolut konvergent**, *falls*

$$\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} \;<\; 1,$$

und auch wenn $a_k \neq 0$ *ab einem Index* N *und*

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \;<\; 1$$

erfüllt ist.

Mit Hilfe dieses Satzes 4.4 können und dürfen wir ab jetzt die absolute Konvergenz vieler Reihen einfach nachweisen. Hierzu ein Beispiel:

Sei $m \in \mathbf{Z}$ vorgegeben. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^m z^k$ konvergiert absolut für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, denn es ist für $z \neq 0$

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{(k+1)^m |z^{k+1}|}{k^m |z^k|} = \limsup_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^m |z| \;=\; |z| \;<\; 1.$$

Zum Schluß noch eine interessante Frage mit einer erstaunlichen Antwort: Wie viele Häufungspunkte kann eine reelle Zahlenfolge haben?
Antwort: Man kann die rationalen Zahlen als Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ schreiben. Man sagt : "Die rationalen Zahlen sind **abzählbar**". Folglich ist jede reelle Zahl ein Häufungspunkt dieser Folge.
Hier ist der Beweis für das Intervall $[0, 1]$: Wir numerieren die rationalen Zahlen

$$\mathbf{Q} \cap [0,1] = \left\{ \frac{p}{q} : \;\; (p,q) = 1, \;\; 0 \leq p \leq q, \;\; q \in \mathbb{N} \right\}$$

zeilenweise von links nach rechts wie folgt:

q=1 : 0, 1,
q=2 : 1/2,
q=3 : 1/3, 2/3,
q=4 : 1/4, 3/4,
q=5 : 1/5, 2/5, 3/5, 4/5,
q=6 : 1/6, 5/6,
und so weiter.

§5. Reell- oder komplexwertige stetige Funktionen

Die meisten Funktionen in der Schule waren Funktionen einer reellen Variablen, zum Beispiel algebraische Polynome

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad a_j \in \mathbb{R},$$

vom Grade $\le n$, oder trigonometrische Polynome

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \Big), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R},$$

der Periode 2π vom Grade $\le n$, oder Exponentialfunktionen, Logarithmus oder Kombinationen dieser Funktionen. Meist waren die Variablen x oder t reell und aus einem **abgeschlossenen** Intervall $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$, **halboffenem** Intervall $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$, $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$, oder einem **offenen** Intervall $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. Wir werden solche Funktionen stets beschreiben durch

$$f : D \to \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad f : D \to \mathbb{C},$$

zum Beispiel $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $D = [a,b]$, indem wir den **Definitionsbereich** D angeben. Als **Bildbereich** oder **Wertebereich** von f bezeichnen wir die Menge $B := \{f(x) : x \in D\}$, und als **Graph** von f die Punktmenge

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad x \in D \right\}.$$

Durch den Graph solcher Funktionen f können wir Kurven in der Ebene beschreiben. Zum Beispiel beschreibt

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \ -1 \le x \le 1,$$

den oberen Einheitskreis in der rechtwinkligen $x-y$-Ebene.

Mit Hilfe von zwei Funktionen $f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ kann man eine Kurve in der Ebene oft besser beschreiben:

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} : \ a \le t \le b \right\}.$$

Diese Darstellung der Kurve K heißt **parametrische** Darstellung, und K hat einen Anfang, $A = (f_1(a), f_2(a))$ und ein Ende $B = (f_1(b), f_2(b))$. Zum Beispiel beschreibt

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix} : \ 0 \le t \le 2\pi \right\}$$

eine Ellipse mit Halbachsen a und b.

Eine kreisförmige Schraubenlinie im $\mathbb{R}^3$ mit Radius $r > 0$ und $c > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ Windungen kann man parametrisch beschreiben durch

$$K = \left\{ \quad \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \\ ct \end{pmatrix} : \quad 0 \le t \le 2\pi N \right\} \quad \subset \quad \mathbb{R}^3.$$

Aber wie beschreibt man Oberflächen im Raum $\mathbb{R}^3$? Im einfachsten Fall durch den **Graph** einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit dem Definitionsbereich (= Grundfläche) $D \subset \mathbb{R}^2$, also durch

$$\mathcal{O} = \left\{ \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} : \quad (x,y) \in D \right\} \quad \subset \quad \mathbb{R}^3.$$

Zum Beispiel ist die Oberfläche der oberen Hälfte der Kugel vom Radius r mit Mittelpunkt $(1.0, -2.0, 3.0)$ beschrieben durch

$$f(x,y) = 3.0 + \sqrt{r^2 - (x-1.0)^2 - (y+2.0)^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \;\; (x-1.0)^2 + (y+2.0)^2 \le r^2.$$

Mehr über Oberflächen werden wir erst im **Sommersemester** kennenlernen.

Neben Definitionsbereichen $D = [a,b]$ oder $D \subset \mathbb{R}^2$ zur Beschreibung von Kurven oder Oberflächen kann der Definitionsbereich D eine Teilmenge der Erdoberfläche oder noch viel komplizierter sein. Für den Mathematiker (in seiner Lust zur Abstraktion) ist dies Anlaß genug, **reellwertige Funktionen** ganz allgemein zu definieren:

Definition 5.1.
Es sei D eine nichtleere Menge. Eine reellwertige Funktion (= reellwertige Abbildung) $f : D \to \mathbb{R}$ ist eine Vorschrift, die jedem $x \in D$ eine reelle Zahl $f(x)$ zuordnet. Eine komplexwertige Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ist eine Vorschrift, die jedem $x \in D$ eine komplexe Zahl $f(x)$ zuordnet.
Analog definieren wir, was ein Funktion $f : D \to \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}^3$, etc. ist.

Um den Abstand zweier reeller oder komplexer Zahlen a, b zu messen, wählt man in der Regel den Betrag $|b-a|$. Als Abstand zweier Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ in der Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ wählt man meist den **Euklidschen Abstand**

$$d_2(P_1, P_2) := \Big((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \Big)^{1/2},$$

manchmal aber auch

$$d_\infty(P_1, P_2) := \max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|\}.$$

Auch im $\mathbb{R}^3$ kann man den Abstand zweier Punkte $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ verschieden messen. Auch hier wählt man meist den **Euklidschen Abstand**

$$d_2(P_1, P_2) := \Big((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \Big)^{1/2},$$

manchmal aber auch

$$d_\infty(P_1, P_2) := \max\{|x_1 - x_2|; |y_1 - y_2|; |z_1 - z_2|\}.$$

Um auch hier viele verschiedene Abstandsbegriffe gleichzeitig und einheitlich zu erfassen und eine allgemeine mathematische Theorie zu betreiben, definiert der Mathematiker den **Abstand = Metrik** axiomatisch:

Definition 5.2. *(***metrischer Raum***)*
*Es sei D eine nichtleere Menge. Auf D sei eine Abbildung $d : D \to \mathbb{R}$ (***distance***)*
definiert mit den Eigenschaften

(M1) $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$ *für alle* $\alpha, \beta \in D$ *(Symmetrie),*
(M2) $d(\alpha, \gamma) \leq d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma)$ *für alle* $\alpha, \beta, \gamma \in D$ *(Dreiecksungleichung),*
(M3) $d(\alpha, \beta) \geq 0$ *für alle* $\alpha, \beta \in D$ *(Positivität),*
(M4) $d(\alpha, \beta) = 0$ *dann und nur dann, wenn* $\alpha = \beta$ *.*

Dann heißt d eine **Metrik** *auf D, und D heißt* **metrischer Raum** *mit Metrik d.*

Die wichtigsten metrischen Räume sind, wie bereits erwähnt,

$D \subseteq \mathbb{R}$ mit der Metrik $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$,
$D \subseteq \mathbb{C}$ mit der Metrik $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$,
$D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der Euklidschen Metrik,
$D \subseteq \mathbb{R}^3$ mit der Euklidschen Metrik.

Vereinbarung: Als Abstandsbegriff in $\mathbb{R}$, in $\mathbb{R}^2$ oder in $\mathbb{R}^3$ legen wir in diesem Kapitel stets die eben genannten Metriken zugrunde.

Wir können nun analog zu den Definitionen 1.1 und 1.2 die Konvergenz von Punktfolgen im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ oder, ganz allgemein, in **metrischen Räumen** definieren.

Definition 5.3. (Cauchyfolge)
Es sei D ein metrischer Raum mit Metrik d. Eine Folge $(a_n)_{n=1}^\infty \subset D$ heißt **Cauchyfolge***, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N_ε gibt, die nur von ε, der Folge, sowie D* **und der Metrik** *d abhängt, so daß*

$$d(a_n, a_m) < \varepsilon \quad \text{für alle } m > N_\varepsilon, \;\; n > N_\varepsilon. \tag{5.1}$$

Ist (a_n) keine Cauchyfolge, so nennen wir sie **divergent***.*

Definition 5.4. (Grenzwert)
Es sei D ein metrischer Raum mit Metrik d. Es heißt $a \in D$ **Grenzwert** *der Folge $(a_n)_{n=1}^\infty \subset D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N_ε^* gibt, die nur von ε, der Folge, sowie D* **und der Metrik** *d abhängt, so daß*

$$d(a_n, a) < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N_\varepsilon^*. \tag{5.2}$$

Wir schreiben dann

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n$$

und sagen:
"Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **konvergiert gegen** *a".*

Eine wichtige Bemerkung:
In Satz 1.1 über reelle Zahlenfolgen haben Cauchyfolgen stets einen eindeutigen Grenzwert. Dies ist auch richtig für $D = \mathbb{R}^2$ und $D = \mathbb{R}^3$.

Definition 5.5. (Stetigkeit)
Es sei D ein metrischer Raum mit Metrik d. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ oder $f : D \to C$ heißt **stetig** *im Punkt $x_0 \in D$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, das von ε, f, x_0, D und der Metrik d abhängen kann, so daß*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } d(x, x_0) < \delta. \tag{5.3}$$

f heißt **stetig** *in D, wenn f in jedem Punkt in D stetig ist.*
f heißt **gleichmäßig stetig** *in D, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit (5.3) existiert, das zwar von ε, f, D und d abhängen kann, nicht aber von $x_0 \in D$. Eine Funktion*

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} : D \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad etc$$

heißt stetig in $x_0 \in D$, wenn jede Komponente $f_1, f_2, \ldots$ in x_0 stetig ist.

Satz 5.1.
Es sei D ein metrischer Raum mit Metrik d. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ oder $f : D \to C$ ist stetig im Punkt $x_0 \in D$ dann und nur dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \tag{5.4}$$

erfüllt ist für alle Folgen $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset D$ mit

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0. \tag{5.5}$$

Beweis:
1. Es sei f in $x_0 \in D$ stetig, und $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in D mit der Eigenschaft (5.5). Zu $\varepsilon > 0$ sei δ das δ der Definition 5.5. Wegen (5.5) gibt es ein N_ε, so daß

$$d(x_n, x_0) < \delta \quad \text{für alle } n > N_\varepsilon.$$

Wegen (5.3) ist dann

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N_\varepsilon,$$

wodurch die Konvergenz (5.4) bewiesen ist.

2. Es gelte (5.4) für jede Folge in D mit der Eigenschaft (5.5).
Angenommen, es sei f nicht stetig in x_0.
Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und jedem $\delta_n := 1/n$ ein $x_n \in D$ existiert, für das

$$d(x_n, x_0) < \delta_n \quad , \quad |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

erfüllt ist. Dies widerspricht aber (5.4). Dieser Widerspruch beweist die Stetigkeit von f in x_0. ■

Beispiele:

1. Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{x}$, ist stetig in jedem Punkt $x_0 \in [0, \infty)$.
   Beweis:
   Sei zunächst $x_0 = 0$. Für $x > 0$ ist dann

   $$|f(x) - f(x_0)| = \sqrt{x}.$$

   Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta := \varepsilon^2$. Dann ist

   $$|f(x) - f(x_0)| = \sqrt{x} < \varepsilon \quad \text{für alle } |x - x_0| = x < \delta.$$

   Also ist (5.3) erfüllt.
   Sei nun $x_0 > 0$. Dann ist

   $$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}.$$

   Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta := \varepsilon\sqrt{x_0}$. Dann ist

   $$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \frac{\delta}{\sqrt{x_0}} = \varepsilon \quad \text{für alle } |x - x_0| < \delta.$$

   Also ist erneut (5.3) erfüllt. ■

Nun eine Herausforderung an Sie: Zeigen Sie, daß man im letzten Beispiel zu $\varepsilon > 0$ für jedes $x_0 \geq 0$ stets $\delta = \varepsilon^2$ wählen kann, um (5.3) zu befriedigen. Also ist $f(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $[0, \infty)$ **gleichmäßig stetig**.

2. Die Funktion $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := 1/x$, ist stetig in jedem Punkt $x_0 \in (0, 1]$, aber nicht gleichmäßig stetig in $(0, 1]$. Den einfachen Beweis überlasse ich Ihnen.

Sehr nützlich für den Nachweis der Stetigkeit von Funktionen ist der folgende Satz:

Satz 5.2.
Es sei D ein metrischer Raum mit Metrik d. Es seien f und g stetige reell- oder komplexwertige Funktionen in D. Dann sind auch die folgenden Funktionen stetig in D:

1. $f+g$, *definiert durch* $(f+g)(x) := f(x)+g(x), \quad x \in D$;
2. αf, *für alle* $\alpha \in \mathbb{C}$, *wobei* αf *definiert ist durch* $(\alpha f)(x) := \alpha f(x), \quad x \in D$;
3. fg, *definiert durch* $(fg)(x) := f(x)g(x), \quad x \in D$;
4. $\frac{f}{g}$, *definiert durch* $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in D$, *falls* $g(x) \neq 0$ *in* D;
5. $\sqrt{f}$, *falls* $f(x) \geq 0$ *für alle* $x \in D$.

Beweis: Wir wollen den Beweis nur für die Aussage (4.) führen:
Wegen der Stetigkeit von f und g in x_0 gilt nach Satz 5.1 für jede Folge in D mit der Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0, \tag{5.5}$$

daß

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \quad , \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0).$$

Nach Satz 1.2 ist dann wegen $g(x_0) \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Erneut wegen Satz 5.1 folgt hieraus die Steigkeit von $\frac{f}{g}$ in x_0. ■

Manchmal sind zwei oder mehrere Funktionen in einander **verschachtelt**, zum Beispiel

$$g(x) := \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

die sich aus den Funktionen

$$F(t) = \sqrt{t}, \;\; 0 \leq t < \infty, \quad \text{und} \;\; f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \;\; -1 \leq x \leq 1,$$

zusammensetzt. Aus der Stetigkeit von f und F folgt die Stetigkeit von g wegen des folgenden Satzes:

Satz 5.3.
Es sei D ein metrischer Raum mit Metrik d, sowie $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Es habe $f : D \to K$ den Wertebereich B. Sei $F : B^* \to K$ mit $B \subseteq B^*$. Ist f stetig in $x_0 \in D$ und F stetig in $f(x_0)$, dann ist $g := F \circ f : D \to K$ stetig in x_0. Hierbei bedeutet $g := F \circ f$, daß $g(x) := F(f(x))$, $x \in D$.

Beweis: Wir verwenden Satz 5.1:
Sei $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine beliebige Folge in D, die gegen x_0 konvergiert. Wegen der Stetigkeit von f in x_0 konvergiert die Folge $y_n := f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, gegen $y_0 := f(x_0)$. Nun ist aber F stetig in y_0. Folglich konvergiert die Folge $F(y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, gegen $F(y_0)$. Wegen der Definition von $g = F \circ f$ ist dies gleichbedeutend mit der Konvergenz von $g(x_n)$ gegen $g(x_0)$, womit wegen Satz 5.1 die Stetigkeit von g in x_0 bewiesen ist. ■

Weitere Beispiele:

3. Die Polynome
$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C}$$
sind stetige Funktionen bezüglich jedes Definitionsbereichs $D \subset \mathbb{C}$.

4. Die rationalen Funktionen
$$R(z) = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k}{\sum_{k=0}^{m} b_k z^k}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{C},$$
sind stetige Funktionen bezüglich jedes Definitionsbereichs $D \subset \mathbb{C}$, der keine Nullstellen des Nennerpolynoms $\sum_{k=0}^{m} b_k z^k$ enthält.

5. Ein **Ellipsoid** ist gegeben durch die Gleichung
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$$
mit den Halbachsen $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Seine obere Hälfte wird daher beschrieben als Graph der Funktion
$$f(x,y) := z_0 + c\left(1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2}\right)^{1/2}, \quad (x,y) \in D,$$
mit
$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} \leq 1\right\},$$
also durch
$$\mathcal{O} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} : \quad (x,y) \in D \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$
Versuchen Sie **mit Hilfe von Satz 5.3** zu beweisen, daß f in D gleichmäßig stetig ist.

Nach diesem Ausflug zu den Funktionen in mehreren Variablen, mit denen wir uns im Sommersemester ausgiebig beschäftigen werden, werden wir in den verbleibenden Wochen des Wintersemesters **nur noch Funktionen einer Variablen** untersuchen.

Ähnlich wie den Grenzwert von Folgen definieren wir Grenzwerte für Funktionen f:

Definition 5.6.
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von D. Sei $f : D \to \mathbb{C}$. Dann schreiben wir

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

falls

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = y_0 \tag{5.6}$$

für jede Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset D$ mit Grenzwert x_0 erfüllt ist.
Wir schreiben

$$y_0 = \lim_{x \to x_0+} f(x),$$

wenn (5.6) richtig ist für alle Folgen $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset D$, die von rechts gegen x_0 konvergieren, und

$$y_0 = \lim_{x \to x_0-} f(x),$$

wenn (5.6) richtig ist für alle Folgen $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset D$, die von links gegen x_0 konvergieren.

Beispiel: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ \frac{1}{1-x}, & x < 0 \ . \end{cases}$$

Dann ist

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = 0,$$

aber

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

existiert nicht. Sie können sofort selber die folgende einfache Aussage beweisen:

Satz 5.4.
Es sei $D = (a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ ein **offenes Intervall**. *Eine Funktion $f : D \to C$ ist stetig in $x_0 \in D$ dann und nur dann, wenn*

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x).$$

§6. Die Sätze von Bolzano, Heine, Weierstraß

Wir wollen nun drei wichtige und nützliche Sätze über stetige Funktionen zusammenstellen.

Satz 6.1. (Zwischenwertsatz von Bolzano)
Es sei $f : [a,b] \to I\!R$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b] := \{x \in I\!R : a \le x \le b\}$ stetig, und es gelte $f(a) < f(b)$ (oder $f(b) < f(a)$). Dann existiert zu jedem η mit $f(a) < \eta < f(b)$ mindestens ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = \eta$.

Beweis:
Erinnern Sie sich noch an den Beweis des Auswahlsatzes von Bolzano und Weierstraß? Auch der Beweis des vorliegenden Zwischenwertsatzes wird über das **Bisektionsverfahren = Halbierungsverfahren** geführt.
Wir setzen $a_0 := a$ und $b_0 := b$. Zu dem vorgegebenen η, $f(a) < \eta < f(b)$, definieren wir die Folge von Intervallen $[a_k, b_k]$, $k \in I\!N$, der Länge $b_k - a_k = 2^{-k}(b-a)$ nach der folgenden Vorschrift:

Setze $c_k := (a_k + b_k)/2$ und
$[a_k, b_k] := [c_k, b_{k-1}]$, falls $f(c_k) < \eta$,
$[a_k, b_k] := [a_{k-1}, c_k]$, falls $f(c_k) > \eta$,
STOP, falls $f(c_k) = \eta$, denn dann hat $\xi := c_k$ die gewünschte Eigenschaft $f(\xi) = \eta$.

Aus der Bedingung $b_k - a_k = 2^{-k}(b-a)$ folgt sofort, daß die Folge $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge ist, und wegen der Stetigkeit von f ist $\lim_{k\to\infty} f(c_k) = \eta$. ■

Satz 6.2. (Heine)
Ist $f : [a,b] \to I\!R$ im **abgeschlossenen** *Intervall $[a,b]$ stetig, so ist f in $[a,b]$ sogar* **gleichmäßig** *stetig.*

Beweis:
Wir führen den Beweis indirekt:
Angenommen, f wäre stetig in $[a,b]$, aber nicht gleichmäßig stetig. Dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft:
Zu jedem $\delta > 0$ gibt es x_δ, $t_\delta \in [a,b]$ mit

$$|x_\delta - t_\delta| < \delta \quad , \quad |f(x_\delta) - f(t_\delta)| \ge \varepsilon.$$

Wir wählen nun $\delta = 1/n$, $n \in I\!N$, und betrachten die beiden Folgen $\xi_n := x_{\delta_n}$, $\eta_n := t_{\delta_n}$, $n \in I\!N$. Die Folge $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ liegt in $[a,b]$, ist also beschränkt. Nach dem Auswahlsatz 4.2 von Bolzano und Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge $(\xi_{n_j})_{j=1}^{\infty}$. Deren Grenzwert ξ liegt in $[a,b]$. Wegen $|\xi_n - \eta_n| < 1/n$, $n \in I\!N$, konvergiert auch $(\eta_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ gegen ξ. Wegen der Stetigkeit von f in ξ ist dann

$$\lim_{j\to\infty} f(\xi_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} f(\eta_{n_j}) = f(\xi).$$

Dies widerspricht aber den Ungleichungen

$$|f(\xi_{n_j}) - f(\eta_{n_j})| \ge \varepsilon, \quad j \in I\!N.$$

Aus diesem Widerspruch folgt die gleichmäßige Stetigkeit von f in $[a, b]$. ■

Satz 6.3. (Weierstraß)
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ im **abgeschlossenen** *Intervall $[a, b]$ stetig, dann ist f in $[a, b]$ beschränkt und nimmt ihr* **Maximum** *und ihr* **Minimum** *an.*
Das heißt, es existieren $x_0 \in [a, b]$ und $x_1 \in [a, b]$ mit

$$f(x_0) = \min_{a \leq x \leq b} f(x) \quad , \quad f(x_1) = \max_{a \leq x \leq b} f(x).$$

Beweis:
Es sei $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset [a, b]$ eine Minimalfolge für f, das heißt,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \inf_{x \in [a,b]} f(x).$$

Nach Satz 4.2 besitzt $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset [a, b]$ eine konvergente Teilfolge $(\xi_{n_j})_{j=1}^{\infty}$, deren Grenzwert ξ in $[a, b]$ liegt. Da f stetig in ξ ist, folgt

$$f(\xi) = \lim_{j \to \infty} f(x_{n_j})$$

und somit

$$f(\xi) = \inf_{x \in [a,b]} f(x),$$

quod erat demonstrandum. Der Beweis für die Existenz eines Maximums ist analog. ■

§7. Potenzreihen

Definition 7.1.
Sei $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ eine reelle oder komplexe Zahlenfolge. Dann heißt der Ausdruck

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

formale Potenzreihe.

Satz 7.1.
1. Jede Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ besitzt einen **Konvergenzradius** *ρ:*
die Potenzreihe konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \rho$, und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \rho$.
2. Der Konvergenzradius ρ kann berechnet werden nach der Formel

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k}.$$

3. Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $a_k \neq 0$ für alle $k \geq N$, dann ist

$$\rho = \liminf_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}.$$

Beweis:
Sei $z \in \mathbb{C}$. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k z^k|$ erfüllt

$$\limsup_{k\to\infty} \left(|a_k z^k|\right)^{1/k} = \frac{|z|}{\rho}.$$

Ist $|z| < \rho$, dann ist dieser Grenzwert < 1; nach Satz 4.4 konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ absolut. Ist aber $|z| > \rho$, so ist $(a_k z^k)_{k=0}^{\infty}$ keine Nullfolge; daher konvergiert $(a_k z^k)_{k=0}^{\infty}$ **nicht**.
Erfüllt die Reihe die Bedingungen in 3., so ist

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1} z^{k+1}|}{|a_k z^k|} < 1,$$

falls

$$|z| < \liminf_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}.$$

Dann konvergiert die Potenzreihe absolut nach Satz 4.4. Ist aber

$$|z| > \liminf_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|},$$

dann ist $(a_k z^k)_{k=0}^{\infty}$ keine Nullfolge. ■

Aber eines müssen wir stets beachten: Für $|z| = \rho$ ist es oft schwierig, die Konvergenz oder Divergenz der Potenzreihe zu beweisen. Wenn Sie gar nicht weiter wissen, nehmen Sie doch den Computer und berechnen Sie

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad n = 0, 1, \dots,$$

für verschiedene $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \rho$.

Beispiele:

1. Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ hat den Konvergenzradius $\rho = 1$. Sie konvergiert für $z = -1$ und divergiert für $z = 1$ (harmonische Reihe). Was aber passiert für alle anderen $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, zum Beispiel für $z = i$ oder $z = -i$?

2. In der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3z-2)^k}{k^2}$ substituieren wir zuerst $w = 3z-2$. Dann hat die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{k^2}$ den Konvergenzradius $\rho = 1$. Sie konvergiert absolut für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| \leq 1$ (siehe Übungsaufgabe 17), und divergiert für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > 1$. Daher konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3z-2)^k}{k^2}$ absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - 2/3| \leq 1/3$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - 2/3| > 1/3$.

3. In der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^k + (-2)^k)(3z^2 - 9)^k}{2k + 5}$$

substituieren wir zunächst $w = 3z^2 - 9$. Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^k + (-2)^k)w^k}{2k + 5}$$

hat den Konvergenzradius $\rho = 1/2$. Also haben wir absolute Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|3z^2 - 9| < 1/2$, das heißt für $|z^2 - 3| < 1/6$.

Durch eine Potenzreihe wird innerhalb des offenen Konvergenzkreises in $\mathbb{C}$ eine Funktion $f : \mathcal{D}_\rho \to \mathbb{C}$ definiert in $\mathcal{D}_\rho := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$, und zwar durch

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in \mathcal{D}_\rho.$$

Wie wir im nächsten Satz sehen werden, ist f stetig in $\mathcal{D}_\rho$, ja sogar beliebig oft **komplex differenzierbar**. Hierbei heißt $f : \mathcal{D}_\rho \to \mathbb{C}$ (komplex) differenzierbar in $z_0 \in \mathcal{D}_\rho$, falls der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0, z \neq z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt **1.Ableitung** von f in z_0 und wird mit $f'(z_0)$ bezeichnet. Es heißt f zweimal differenzierbar in z_0, falls f und f' in z_0 differenzierbar sind, et cetera.

Satz 7.2.
Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ habe einen Konvergenzradius $\rho > 0$ oder $\rho = \infty$. Dann ist die durch

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in \mathcal{D}_\rho,$$

definierte Funktion $f : \mathcal{D}_\rho \to \mathbb{C}$ in $\mathcal{D}_\rho$ stetig und beliebig oft differenzierbar, und es ist

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}, \quad z \in \mathcal{D}_\rho,$$

$$f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k z^{k-2}, \quad z \in \mathcal{D}_\rho,$$

und allgemein

$$\frac{f^{(q)}(z)}{q!} = \sum_{k=q}^{\infty} \binom{k}{q} a_k z^{k-q}, \quad z \in \mathcal{D}_\rho, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Diesen Beweis wollen wir nicht führen. Wie wäre es, wenn Sie hierzu die Literatur befragen würden ? ■

Stattdessen wollen wir an Beispielen zeigen, wie nützlich dieser Satz ist:
Die geometrische Reihe hat den Konvergenzradius $\rho = 1$,

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad |z| < 1.$$

Folglich ist nach Satz 7.2

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}, \quad |z| < 1.$$

$$f''(z) = \frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) z^{k-2}. \quad |z| < 1.$$

Differenzieren wir gliedweise die in ganz $\mathbb{C}$ absolut konvergenten Potenzreihen

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad , \quad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad , \quad \cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!},$$

so erhalten wir deren Ableitungen

$$\Big(\exp(z)\Big)' = \exp(z) \quad , \quad \Big(\sin(z)\Big)' = \cos(z) \quad , \quad \Big(\cos(z)\Big)' = -\sin(z).$$

§8. Die Exponentialfunktion

Wir haben schon früher die Exponentialfunktion definiert durch

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad , \quad z \in \mathbb{C}, \tag{8.1}$$

und mit Hilfe des Quotienten- oder Wurzelkriteriums festgestellt, daß diese Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert. Nach Satz 7.2 ist exp in $\mathbb{C}$ stetig und beliebig oft (komplex) differenzierbar.

Wir wollen einige wichtige Eigenschaften von exp zusammenstellen:

Satz 8.1.

1. $\exp(0) = 1$, exp *ist streng monoton steigend in* $[0, \infty)$, *insbesondere ist* $\exp(x) > 1$ *für alle* $x > 1$*;*
2. $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$ *für alle* z, $w \in \mathbb{C}$,
   insbesondere $\exp(z)\exp(-z) = 1$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$*, sowie*
   $$\exp(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = \prod_{k=1}^{n} \exp(z_k) \quad \text{für alle } z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}.$$
3. $\exp(z) \neq 0$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$*. Ist* $z = x + iy$ *mit Real- und Imaginärteil* x *und* y*, dann gilt*
   $$\exp(z) = \exp(x)\exp(iy) \quad , \quad |\exp(z)| = \exp(x). \tag{8.2}$$
4. exp ist streng monoton steigend in $(-\infty, 0]$, sowie $0 < \exp(x) < 1$ für alle $x < 0$;
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

Beweis:
1. Dies können wir sofort aus der Potenzreihe (8.1) ablesen.
2. Mit Hilfe des Cauchyproduktes berechnen wir

$$\begin{aligned}\exp(z)\exp(w) &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{w^\ell}{\ell!}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \frac{z^j}{j!}\frac{w^{k-j}}{(k-j)!} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} z^j w^{k-j} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(z+w)^k = \exp(z+w).\end{aligned}$$

Also gilt $\exp(z)\exp(w) = \exp(z + w)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.
Setzen wir $w = -z$, so folgt $\exp(z)\exp(-z) = \exp(z - z) = \exp(0) = 1$.
3. Wegen $\exp(z)\exp(-z) = 1$ kann $\exp(z)$ nicht 0 sein. Wegen $|\exp(iy)| = 1$ für $y \in \mathbb{R}$ (Übungsaufgabe) folgt die rechte Gleichung in (8.2).
4. Wegen $\exp(x)\exp(-x) = 1$ und der Monotonie von $\exp(x)$ für $0 \leq x < \infty$, folgt die Monotonie für $-\infty < x < 0$. Außerdem folgen die Ungleichungen $0 < \exp(x) < 1$ $-\infty < x < 0$, da $\exp(x) > 1$ für $x > 0$.

5. Offensichtlich strebt $\exp(x)$ gegen $+\infty$ für $x \to +\infty$, was wir sofort aus der Potenzreihe (8.1) ersehen. Wegen $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ strebt $\exp(x)$ gegen 0 für $x \to -\infty$. ■

Anstelle der Bezeichnung $\exp(z)$ ist auch die Schreibweise e^z gebräuchlich. Wir wollen nun erklären, wie es zu dieser Schreibweise kam:
Wir haben schon früher die Eulersche Zahl e definiert durch

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots = 2.718281828...,$$

also durch

$$e = e^1 = \exp(1).$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$, und wenden wir die Formel $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$ mehrfach an, so erhalten wir

$$\exp(n) = \exp((n-1)+1) = \exp(n-1)\exp(1) = \cdots = \Big(\exp(1)\Big)^n,$$

also

$$\exp(n) = e^n.$$

Ähnlich können wir zeigen, daß für jede rationale Zahl $r = p/q$ mit $q \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbf{Z}$,

$$\exp(p/q) = \Big(\exp(1/q)\Big)^p = \Big(\exp(p)\Big)^{1/q}$$

gilt, was wir auch schreiben können als

$$e^r = e^{p/q} = \Big(e^{1/q}\Big)^p = \Big(e^p\Big)^{1/q}.$$

Hierbei müssen wir beachten, daß $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und daß wir schon früher die Zahl $\beta := a^{1/q}$ mit $a > 0$ und $q \in \mathbb{N}$ definiert haben als die positive Zahl mit der Eigenschaft $\beta^q = a$.

Für alle anderen $x \in \mathbb{R}$, $x \notin \mathbf{Q}$, **definieren** wir die x-te Potenz e^x von e durch

$$e^x := \exp(x),$$

aber auch

$$e^z := \exp(z) \quad \text{für alle anderen } z \in \mathbb{C}.$$

§9. Die trigonometrischen Funktionen

Wie schon früher erwähnt, definieren wir den **Kosinus** und den **Sinus** durch die Potenzreihen

$$\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} \quad , \quad \sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Beide Funktionen gehören zur Klasse der **trigonometrischen Funktionen**. Wie wir schon früher gezeigt haben, sind beide Funktionen stetig in $\mathbb{C}$, und sogar beliebig oft differenzierbar in $\mathbb{C}$. Da wir die Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzkreises (hier: innerhalb $\mathbb{C}$) gliedweise differenzieren dürfen, erhalten wir die Ableitungen

$$\Big(\sin(z)\Big)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1) z^{2k}}{(2k+1)!} = \cos(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\Big(\cos(z)\Big)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k) z^{2k-1}}{(2k)!} = -\sin(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Sofort erkennen wir weitere Eigenschaften der obigen Potenzreihen, zum Beispiel

$\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$,
$\cos(-z) = \cos(z)$, der Kosinus ist eine gerade Funktion,
$\sin(-z) = -\sin(z)$, der Sinus ist eine ungerade Funktion.

Wir haben auch schon bewiesen, daß $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$ ist. Ähnlich, mit Hilfe des Cauchyproduktes (das heißt, durch Vergleich der Koeffizienten der Potenzen $1, z, z^2, z^3, \ldots$) beweist man die folgenden **Additionstheoreme**:

Satz 9.1.
Es gilt für alle $z, \eta \in C$

$$\sin(z+\eta) = \sin(z)\cos(\eta) + \cos(z)\sin(\eta),$$
$$\sin(z-\eta) = \sin(z)\cos(\eta) - \cos(z)\sin(\eta),$$
$$\cos(z+\eta) = \cos(z)\cos(\eta) - \sin(z)\sin(\eta),$$
$$\cos(z-\eta) = \cos(z)\cos(\eta) + \sin(z)\sin(\eta).$$

Setzen wir in der 4.Gleichung des Satzes 9.1 $\eta = z$, so folgt

$$(\sin(z))^2 + (\cos(z))^2 = 1, \quad z \in \mathbb{C},$$

was wir bereits in den Übungen bewiesen haben.

Erinnern möchte ich auch an die Identität

$$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{ oder auch } x \in \mathbb{C}) \ ,$$

die wir auch schreiben als

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{ oder auch } x \in \mathbb{C}) \ .$$

Für jede natürliche Zahl n ist

$$\exp(inx) = \exp(i(n-1)x + ix) = \exp(i(n-1)x)\exp(ix) = \cdots = (\exp(ix))^n.$$

Wegen

$$\exp(inx) = \cos(nx) + i\sin(nx), \quad x \in \mathbb{R}$$

folgt somit die **Formel von Moivre** aus Kapitel 1,

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \tag{9.1a}$$

Auf ähnliche Weise können Sie sofort zeigen, daß

$$(\cos(x) + i\sin(x))^{-n} = \cos(nx) - i\sin(nx) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \tag{9.1b}$$

Die beiden Gleichungen (9.1) gelten sogar für alle $x \in \mathbb{C}$.

Aus der Potenzreihe (9.1) des Sinus erkennen wir sofort, daß $\sin(x) > 0$ für $0 < x \leq 2$ ist. Wir definieren die Zahl π als die **kleinste positive Nullstelle** der Sinus-Funktion. Es ist $\pi = 3.14159265\ldots$. Also ist $\sin(x) > 0$ für $0 < x < \pi$, $\sin(\pi) = 0$. Aus den Additionstheorem folgt sofort

Satz 9.2.
1. Es ist

$$\cos(0) = 1 \quad , \quad 0 < \cos(x) < 1, \; 0 < x < \pi/2 \quad , \quad \cos(\pi/2) = 0.$$

2. Die Sinus- und die Kosinusfunktion sind 2π-periodisch, das heißt,

$$\sin(z + 2\pi) = \sin(z) \quad , \quad \cos(z + 2\pi) = \cos(z) \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

3. Es gilt

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(z) \quad , \quad \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(z) \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Den einfachen Beweis dieses Satzes will ich Ihnen überlassen.

Aufgaben:

1. **Zeichnen Sie** die Sinus- und die Kosinusfunktion, aber auch die Funktionen $\sin(2x)$, $\sin(3x)$ $\cos(2x)$, $\cos(3x)$, sowie $\sin(2\pi x)$.

2. **Zeichnen Sie** den Tangens und Kotangens, die wir folgendermaßen definieren:

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$
$$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad 0 < x < \pi.$$

Beachten Sie, daß

$$\cot(x+\frac{\pi}{2}) = \frac{\cos(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x).$$

Geometrisch bedeutet dies, daß wir den Graph des Tangens erhalten, wenn wir den Graph des Kotangens nach links um $\pi/2$ verschieben und dann an der x-Achse spiegeln.

3. Erklären Sie die geometrische Bedeutung des Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens am **Einheitskreis** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Verwenden Sie hierbei, daß

$$e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{2\pi i} = 1,$$

sowie die Gleichungen

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t), \quad t \in \mathbb{R},$$
$$e^{int} = \cos(nt) + i\sin(nt), \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie den **"Pythagoras"** mit Hilfe der Gleichung

$$(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Erinnern Sie sich an die Polarkoordinatendarstellung der komplexen Zahlen,

$$z = |z|\Big(\cos(t) + i\sin(t)\Big).$$

§10. Die Umkehrfunktion

Definition 10.1.
Es sei D ein reelles Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende oder streng monoton fallende Funktion mit Wertebereich B. Dann besitzt f eine **Umkehrfunktion**, *die wir mit $f^{-1} : B \to \mathbb{R}$ bezeichnen und die durch*

$$f^{-1}\Big(f(x)\Big) := x \quad \textit{für alle } x \in D, \tag{10.1}$$

eindeutig definiert ist.

Eine gleichwertige Definition der Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$f\Big(f^{-1}(y)\Big) := y \quad \text{für alle } y \in B, \tag{10.2}$$

denn es ist

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathrm{id} \quad (\text{die Identität auf } D \text{ oder } B).$$

Mit Hilfe des Satzes 5.1 erkennen wir sofort, daß die Umkehrfunktionen stetiger Funktionen auch stetig sind.

Geometrisch hat die Umkehrfunktion eine einfache Deutung: Tragen Sie den Graph $\left\{ \binom{x}{f(x)} : x \in D \right\}$ in ein rechtwinkliges $x - y$-Koordinatenkreuz ein, so erhalten Sie den Graph $\left\{ \binom{x}{f^{-1}(x)} : x \in B \right\}$ der Umkehrfunktion f^{-1} durch Spiegelung an der Diagonalen $\left\{ \binom{x}{x} : x \in \mathbb{R} \right\}$.

10.1. Der Logarithmus ln (natürlicher Logarithmus)

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nennen wir den Logarithmus ln,

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}.$$

Der Logarithmus hat den Definitionsbereich $(0, \infty) = \{\exp(x) : x \in \mathbb{R}\}$. Also ist

$$\exp(\ln(x)) = x \quad \text{für alle } 0 < x < \infty,$$
$$\ln(\exp(x)) = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Offensichtlich ist

$$\ln(1) = 0 \quad , \quad \ln(e) = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0+} \ln(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Wir wollen nun einige Eigenschaften des Logarithmus herleiten:

Satz 10.1. *Es ist*

$$\ln(x_1 x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2) \quad \textit{für alle } x_1 > 0, x_2 > 0,$$
$$\ln \frac{1}{x} = -\ln(x) \quad \textit{für alle } x > 0,$$
$$\ln(x^n) = n \ln(x) \quad \textit{für alle } x > 0, n \in \mathbf{Z}$$
$$\ln(x^{1/n}) = \frac{1}{n} \ln(x) \quad \textit{für alle } x > 0, n \in \mathbb{N}.$$

Beweis:
Diese Eigenschaften des Logarithmus folgen sofort aus $\ln(1) = 0$, $\exp(0) = 1$ und aus $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1)\exp(x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. ■

Erinnern Sie sich? Die letzte Gleichung dieses Satzes 10.1 haben wir schon früher verwendet, um in Satz 7.1 den Konvergenzradius ρ einer Potentreihe auszurechnen,

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{k \to \infty} |a_k|^{1/k} = \limsup_{k \to \infty} \ \exp\left(\frac{1}{k} \ln(|a_k|) \right).$$

Wir haben am Ende des §8 die Schreibweise e^x, $x \in \mathbb{R}$, und sogar e^z, $z \in \mathbb{C}$ definiert durch

$$e^x := \exp(x) \quad , \quad e^z := \exp(z).$$

Etwas allgemeiner definieren wir nun

Definition 10.2.
Es sei $a > 0$ eine positive reelle Zahl und $x \in \mathbb{R}$, dann definieren wir die x-te **Potenz** *von a durch*

$$a^x := \exp(x \ln(a)) \quad \textit{und schreiben auch} \quad a^x = e^{x \ln(a)}.$$

Ohne Schwierigkeiten (??) können Sie nun die folgenden Rechenregeln beweisen:

Satz 10.2. *Es ist*

$$\begin{aligned} a^{x+t} &= a^x a^t \quad \textit{für alle } a > 0, x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \\ \ln(a^x) &= x \ln(a) \quad \textit{für alle } a > 0, x \in \mathbb{R} \\ \left(a^x\right)^t &= a^{xt} \quad \textit{für alle } a > 0, x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

10.2. Die zyklometrischen Funktionen

Der Sinus ist streng monoton steigend im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und hat dort den Wertebereich $[-1, 1]$. Deren Umkehrfunktion nennen wir den **Arkus Sinus**, $\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$.

Der Kosinus ist streng monoton fallend im Intervall $[0, \pi]$ und hat dort den Wertebereich $[-1, 1]$. Deren Umkehrfunktion nennen wir den **Arkus Kosinus**, $\arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R}$.

Der Tangens ist streng monoton steigend im offenen Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und hat dort den Wertebereich $(-\infty, +\infty)$. Deren Umkehrfunktion nennen wir den **Arkus Tangens**,
$\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Der Kotangens ist streng monoton fallend im offenen Intervall $(0, \pi)$ und hat dort den Wertebereich $(-\infty, +\infty)$. Deren Umkehrfunktion nennen wir den **Arkus Kotangens**,
$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe:
Zeichnen Sie diese zyklometrischen Funktionen.

Die Programmiersprache C verfügt über eine sehr große Bibliothek an mathematischen Funktionen, deren Prototypen sich in der Datei **math.h** befinden. Ich habe hier alle aufgelistet, die bisher in der Vorlesung vorkamen:

```
cos(), acos()
sin(), asin()
tan, atan()
exp(), log()
sqrt(), pow(double,double)      /* Wurzel, Potenz */
abs(int), fabs(double)      /* Absolutbetrag */
floor(), ceil()      /* Abrunden, Aufrunden */
```

Aber **Vorsicht: C** ist manchmal heimtückisch. Wenn Sie für $a > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ die Zahl $a^{1/k}$ ausrechnen wollen, müssen Sie $\mathrm{pow}(a, 1.0/k)$ schreiben, nicht aber $\mathrm{pow}(a, 1/k)$.

§11. Das Riemannsche Integral

Der Flächeninhalt eines Rechtecks gegeben durch die vier Punkte

$$(a, 0) \ , \ (a, c) \ , \ (b, 0) \ , \ (b, c) \ ,$$

ist $F = (b-a)c$. Der Flächeninhalt eines Trapez gegeben durch die vier Punkte

$$(a, 0) \ , \ (a, c) \ , \ (b, 0) \ , \ (b, d) \ ,$$

ist $F = \frac{b-a}{2}(d+c)$. Sei nun eine stetige nichtnegative Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann kann man den Flächeninhalt der durch die x-Achse, die zwei Geraden $x = a$, $x = b$ und durch die Kurve $y = f(x)$, $a \le x \le b$, aufgespannte Fläche näherungsweise berechnen, und zwar indem man

1. das Intervall $[a, b]$ partitioniert in $n \in \mathbb{N}$ Teile,

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

2. für $j = 0, 1, \ldots, n-1$ einen Punkt $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$ wählt und die Flächeninhalte der so gewonnenen Teilrechtecke der Höhe $f(\xi_j)$ summiert,

$$F \approx J := \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) f(\xi_j). \tag{11.1}$$

Man nennt die Zahl J eine **Riemannsche Zwischensumme**.

Nimmt f auch negative Werte an, so werden in der Summe in (11.1) die Flächenteile unterhalb der x-Achse nicht addiert, sondern subtrahiert.

Ein numerisch interessanter Spezialfall ist hierbei die **Trapezregel**:

1. das Intervall $[a, b]$ wird in $n \in \mathbb{N}$ gleichgroße Teile zerlegt,

$$\Delta : a = x_0 < \cdots < x_k = a + kh < \cdots < x_n = b, \quad \text{mit Schrittweite } h := \frac{b-a}{n},$$

2. und man wählt die ξ_j so, daß

$$f(\xi_j) = \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Dann ist $h * f(\xi_j)$ der $(\pm)$Flächeninhalt des durch die vier Punkte

$$(x_j, 0) \ , \ (x_j, f(x_j)) \ , \ (x_{j+1}, 0) \ , \ (x_{j+1}, f(x_{j+1})) \ ,$$

gegebenen Trapez, und der $(\pm)$Flächeninhalt F wird approximiert durch die **Trapezsumme**

$$T(f) := h\Big(\frac{f(a)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{f(b)}{2}\Big). \tag{11.2}$$

Allgemein definieren wir das (**Riemannsche**) Integral wie folgt

Definition 11.1.
Es sei $f : [a,b] \to I\!R$ eine beschränkte Funktion. f heißt **integrierbar in** $[a,b]$, *wenn die Folge*

$$J_n := \sum_{j=0}^{n-1} (x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)}) f(\xi_j^{(n)}), \quad n \in I\!N \tag{11.3}$$

für alle Partitionen

$$\Delta_n : a = x_0^{(n)} < \cdots < x_k^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} = b$$

mit

$$\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0, \quad |\Delta_n| := \max\{x_{j+1}^{(n)} - x_j^{(n)} : \ j = 0, \ldots, n-1\}$$

und alle Zwischenstellen $\xi_j^{(n)} \in [x_j^{(n)}, x_{j+1}^{(n)}]$ stets gegen dieselbe Zahl konvergiert. Diesen Grenzwert bezeichnen wir mit

$$\int_a^b f \quad \text{oder ausführlicher mit} \quad \int_a^b f(x) \ dx \ \text{ oder } \ \int_a^b f(t) \ dt.$$

Satz 11.1. *Ist $f : [a,b] \to I\!R$ in $[a,b]$ stetig, dann ist f integrierbar.*

Beweis: Diesen Beweis überlasse ich Ihnen. Ein Hinweis: Benutzen Sie die **gleichmäßige Stetigkeit** von f (Satz 6.2 von Heine). ■

Beispiele:

1. $f(x) = c$, $\int_a^b c \ dx = c(b-a)$,
2. $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Es ist $\int_a^b x^n dx = (b^{n+1} - a^{n+1})/(n+1)$.
3. Es ist $\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$.
4. Es ist $\int_a^b \cos x \ dx = \sin b - \sin a$.
5. Es ist $\int_a^b \sin x \ dx = -\cos b + \cos a$.
6. Es ist $\int_a^b e^{i\alpha x} dx = \frac{1}{i\alpha}\Big(e^{i\alpha b} - e^{i\alpha a}\Big)$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ oder sogar $\alpha \in \mathbb{C}$.
7. Es ist $\int_a^b x^\alpha dx = \frac{1}{1+\alpha}\Big(b^{1+\alpha} - a^{1+\alpha}\Big)$ für jedes $\alpha > -1$.

Die Beweise dieser Formeln wollen wir zurückstellen, denn diese Formeln werden sofort aus dem **Hauptsatz der Infinitesimalrechnung** folgen.

Wir wollen nun ein kurzes **C**-Programm schreiben, daß zu gegebener Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ das Integral $\int_a^b f$ mit Hilfe der Trapezregel ausrechnet:

```
/* Trapezregel */
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<stdlib.h>
main(){
    const int n = 200;
    const double PI = 4.0*atan(1.0);
    int k;
    double a, b, h, s, integral;
    float f(float x)
    {
        return sin(x);
    }
    a=0;
    b=PI;
    h=(b-a)/n;
    s= (f(a)+f(b))/2;
    for (k = 1; k <= n - 1; k++)
        s=s+f(a+k*h);
    integral=s*h;
    printf("n=%4d        Integral=%2.6f \n",n,integral);
}
```

Der exakte Wert ist $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos\pi + \cos 0 = 2$. In der folgenden Tabelle sind die Näherungswerte J_n, die Fehler $2.0 - J_n$, sowie die gewichteten Fehler

$$\frac{2 - J_n}{h^2}$$

für verschiedene Zahlen n berechnet:

n	J_n	$2 - J_n$	$h^{-2}(2 - J_n)$
10	1.983524	0.016476	0.166941
50	1.999342	0.000658	0.166678
100	1.999836	0.000164	0.166669
200	1.999959	0.000041	0.166667

Wir wollen das **C**-Programm zur Integration durch die Trapezregel in ein **Pascal**-Programm übersetzen:

```
program Trapezregel;
const a = 0;
      b = pi;
      n = 200;
var
      k : integer;
      h, s, integral : extended;
      function f(x:real):real;
      begin
            f:=sin(x);
      end;
begin
      h:=(b-a)/n;
      s:= (f(a)+f(b))/2;
      for k:=1 to n-1 do
            s:=s+f(a+k*h);
      integral:=s*h;
      writeln('n=',n,' Integral=',integral:2:6);
end.
```

Wir wollen nun ohne Beweis einige einfache, aber sehr nützliche Rechenregeln für das Integrieren auflisten:

Satz 11.2.
1. Sind $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ in $[a,b]$ integrierbar, so sind auch $f+g$ und αf, $\alpha \in \mathbb{C}$, in $[a,b]$ integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad , \quad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

2. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in $[a,b]$ integrierbar, so ist f in jedem Teilintervall $[c,d] \subset [a,b]$ integrierbar. Insbesondere ist f in jedem Interval $[a,x_0]$ und $[x_0,b]$ mit $a < x_0 < b$ integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^b f.$$

3. Sei $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in jedem Teilintervall $[x_j, x_{j+1}]$, $0 \le j < n$ integrierbar, so ist f in $[a,b]$ integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f.$$

Beweis: Verwenden Sie die Definition 11.1 des Riemannschen Integrals. ■

Zum Beispiel sind alle **stückweise stetigen** Funktionen in $[a,b]$ integrierbar.
Hierbei nennen wir eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **stückweise stetig**, falls eine Partition $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ existiert, so daß

f in jedem offenen Interval (x_j, x_{j+1}), $j = 0, \ldots, m-1$, stetig und beschränkt ist, und die Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_j+} f(x), \;\; j = 0, \ldots, m-1, \qquad \lim_{x \to x_j-} f(x), \;\; j = 1, \ldots, m$$

existieren.

Sehr einfach folgt aus Definition 11.1 die folgende Aussage:
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in $[a,b]$ integrierbar, so ist auch $|f| : [a,b] \to \mathbb{R}$ in $[a,b]$ integrierbar, und es gilt

$$\Big| \int_a^b f \Big| \leq \int_a^b |f|.$$

Eine direkte Folge der Definition 11.1 ist auch der nächste

Satz 11.3. *(***Mittelwertsatz der Integralrechnung***)*
Sind f und g stetige Funktionen in $[a,b]$, und ist $g(x) \geq 0$ in $[a,b]$ (oder $g(x) \leq 0$ in $[a,b]$), dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit der Eigenschaft

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

Insbesondere im Falle $g \equiv 1$ gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a).$$

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in $[a,b]$ integerierbar, so schreiben wir manchmal aus Bequemlichkeit

$$\int_b^a f := -\int_a^b f.$$

In §14 werden wir über den **Hauptsatz der Infinitesimalrechnung** sprechen. Er liefert Techniken zur Berechnung von Integralen. Diese Techniken haben alle das Ziel, die **Stammfunktionen** von f zu finden, zum Beispiel mit Hilfe der **Substitutionsregel** oder durch **partielle Integration**.

§12. Differenzierbarkeit einer Funktion

Definition 12.1.
Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ (oder $f : D \to \mathbb{C}$) mit $D \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt f in $x_0 \in D$ differenzierbar, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0, x \in D} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Anstelle von f' schreiben wir auch

$$\frac{df}{dx} \quad , \quad \text{oder } \frac{df}{dt}.$$

Der Grenzwert $f'(x_0)$ heißt **1.Ableitung** *(oder* **Ableitung***) von f in x_0.*
Ist f in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar, so wird hierdurch die Funktion $f' : D \to \mathbb{R}$ (oder $f' : D \to \mathbb{C}$) definiert. Ist f' stetig in D, so schreiben wir
$f' \in C(D)$ ($C =$ **continuous***) und auch $f \in C^1(D)$.*
Ist f' differenzierbar in $x_0 \in D$, schreiben wir

$$f''(x_0) := (f')'(x_0) \quad \text{(2.Ableitung).}$$

Existiert f'' in D und ist f'' stetig in D, so schreiben wir $f \in C^2(D)$, u.s.w.

Definition 12.2.
Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ (oder $f : D \to \mathbb{C}$) mit $D \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt f in $x_0 \in D$ rechtsseitig differenzierbar, falls der Grenzwert

$$f'(x_0+) := \lim_{x \to x_0+, x \in D} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Analog definieren wir die linksseitige Ableitung

$$f'(x_0-) := \lim_{x \to x_0-, x \in D} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Aus der Definition 12.1 der Differenzierbarkeit folgt sofort der folgende

Satz 12.1.
Ist f differenzierbar in $x_0 \in D$, so ist f stetig in D.

Beispiele: Beweisen Sie
1. : Es ist $\frac{d}{dx} x^n := \left(x^n\right)' = nx^{n-1}$.
2. : Es ist $\frac{d}{dx} e^x = e^x$.
3. : Es ist $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$.
4. : Es ist $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$.

Sehr hilfreich beim Differenzieren von Funktionen sind die folgenden Rechenregeln, insbesondere die **Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel**.

Satz 12.2.
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Sind $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ (oder $\to \mathbb{C}$) in x_0 differenzierbar, dann sind auch die Funktionen $f + g$, αf mit $\alpha \in \mathbb{C}$, fg und f/g mit $g(x_0) \neq 0$ in x_0 differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned}
&(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \quad , \quad (\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0), \\
&(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \qquad \textit{(Produktregel)} \\
&\Big(\frac{f}{g}\Big)(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \qquad \textit{(Quotientenregel).}
\end{aligned}$$

Beweis:
Wir beweisen nur die Quotientenregel:
Für $x \in D$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-x_0}\Big(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\Big) &= \frac{1}{x-x_0}\Big(\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x_0)g(x)}\Big) \\
&= \frac{1}{g(x_0)g(x)}\left(\frac{\{f(x)-f(x_0)\}g(x_0)}{x-x_0} - \frac{f(x_0)\{g(x)-g(x_0)\}}{x-x_0}\right) \\
&\to \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \quad \text{für } x \to x_0, \quad x \in D.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, daß die in x_0 differenzierbaren Funktionen f und g in x_0 stetig sind. ■

Satz 12.3. *(Kettenregel)*
Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar und habe den Wertebereich B. Es sei $F : B^* \to \mathbb{R}$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar, und es gelte mit $B \subseteq B^*$. Dann ist die Funktion $g := F \circ f : D \to \mathbb{R}$ ebenfalls in x_0 differenzierbar, und

$$g'(x_0) = F'(y_0)f'(x_0).$$

Beweis:
Es sei zunächst $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset D$ eine Folge mit $f(x_n) \neq f(x_0)$. Dann ist

$$\frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n - x_0} = \left(\frac{F(f(x_n)) - F(f(x_0))}{f(x_n)-f(x_0)}\right)\left(\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\right),$$

und wegen der Differenzierbarkeit und somit der Stetigkeit von F in y_0 und f in x_0,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{F(f(x_n)) - F(f(x_0))}{f(x_n)-f(x_0)}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\right) \\
&= F'(f(x_0)f'(x_0).
\end{aligned}$$

Ist aber $(x_n)_{n=1}^\infty \subset D$ eine Folge mit $f(x_n) = f(x_0)$, dann ist $f'(x_0) = 0$ und auch $g(x_n) = g(x_0)$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} = 0 = F'\Big(f(x_0)\Big)f'(x_0),$$

quod erat demonstrandum. ■

Beispiele:

1. Es ist für $-\pi/2 < x < \pi/2$ nach der Quotientenregel

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

2. Es ist für $0 < x < \pi$ nach der Quotientenregel

$$\begin{aligned}(\cot x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' \\ &= \frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.\end{aligned}$$

3. Es ist für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ nach der Kettenregel

$$\Big(\sin^n x\Big)' = n(\sin^{n-1} x)\cos x.$$

4. Für $x \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ ist nach der Quotientenregel

$$\Big(x^{-n}\Big)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0 * x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}},$$

also

$$\Big(x^{-n}\Big)' = -nx^{-n-1}.$$

Hieraus folgt nach der Kettenregel für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq \pi/2 \bmod(\pi)$, daß

$$\Big(\cos^{-n} x\Big)' = n(\cos x)^{-n-1}\sin x.$$

5. Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\Big(a^x\Big)' = \Big(e^{x\ln a}\Big)' = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a.$$

6. Es sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^x$ für $x > 0$ und $f(0) := 1$. Für $x > 0$ ist f in $x_0 = 0$ stetig wegen

$$x^x = e^{x \ln x} \to e^0 = 1 = f(0).$$

Hierbei haben wir benutzt, daß $\lim\{x \ln x\} = 0$ für $x \to 0+$. Des weiteren ist für $x > 0$ nach der Kettenregel

$$f'(x) = e^{x \ln x}\Big(\ln x + x(\ln x)'\Big) = x^x(\ln(x) + 1),$$

denn wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden ist $(\ln x)' = 1/x$ für $x > 0$. Aber existiert $f'(0+)$? Wir müssen betrachten

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{e^{x \ln x} - 1}{x} = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x \ln x)^k}{k!} \\ &= \ln x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}(\ln x)^k}{k!} \to -\infty \quad \text{für } x \to 0+\,. \end{aligned}$$

Haben Sie Angst vor Rechenfehlern? Nehmen wir an, Sie haben die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{e^{-2x^2} \sin(2x - 5)}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{12.1}$$

mit Hilfe der Quotientenregel und Kettenregel ausgerechnet und wollen sicher sein, daß Ihre Formel stimmt. Dann nehmen Sie doch den Computer und berechnen Sie für kleine Werte $h > 0$ die Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} &\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \approx f'(x) \quad \text{oder} \\ &\frac{f(x) - f(x-h)}{h} \approx f'(x) \quad \text{oder} \\ &\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \approx f'(x) \quad \text{(zentraler Differenzenquotient)} \end{aligned}$$

an mehreren Stellen $x \in \mathbb{R}$ und vergleichen Sie diese Werte mit den Werten der Formel (12.1).

§13. Differenzieren der Umkehrfunktion

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion.

Satz 13.1.
Ist f in $x_0 \in D$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist deren Umkehrfunktion f^{-1} in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar, und es ist

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{13.1}$$

Beweis: Da f in x_0 differenzierbar ist, ist f nach Satz 12.1 in x_0 stetig. Also ist f^{-1} in y_0 stetig, und es gilt für $y = f(x)$

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{für } y \to y_0. \qquad \blacksquare$$

Die Formel (13.1) folgt auch aus der Kettenregel. Denn wegen

$$x = f^{-1}(f(x)), \quad x \in D,$$

wird durch beidseitiges Differenzieren nach der Kettenregel

$$1 = (f^{-1})'(y) f'(x), \quad y = f(x).$$

Beispiele:

1. $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Wegen $(e^x)' = e^x$ ist nach (13.1)

$$(\ln y)' = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}, \quad y > 0.$$

2. $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \neq 0$. Wegen $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ folgt aus der Kettenregel, daß

$$(x^\alpha)' = e^{\alpha \ln x} \alpha (\ln x)' = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

3. $f(x) = \sin x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Nach Satz 13.1 ist

$$\begin{aligned}(\arcsin y)' &= \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad -1 < y < 1.\end{aligned}$$

Also ist

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

Ähnlich beweist man

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1,$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty,$$
$$(\mathrm{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

4. Es sei $f(x) = e^{i\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$, mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist nach der Kettenregel

$$f'(x) = i\lambda e^{i\lambda x} \quad , \quad f''(x) = (i\lambda)^2 e^{i\lambda x} \quad , \quad f^{(3)}(x) = (i\lambda)^3 e^{i\lambda x},$$

und allgemein $f^{(k)}(x) = (i\lambda)^k e^{i\lambda x}$, $k \in \mathbb{N}$.
Anwendung: Alle Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y''(t) + by'(t) + cy(t) = 0, \quad a < t < b, \tag{13.2}$$

mit den konstanten Koeffizienten $b, c \in \mathbb{C}$ sind von der Form

$$y(t) = \alpha e^{i\lambda_1 t} + \beta e^{i\lambda_2 t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \tag{13.3a}$$

falls die Nullstellen λ_1 und λ_2 des Polynoms $P(z) := z^2 + bz + c$ verschieden sind. Ist $P(z) = z^2 + bz + c$ von der Form $P(z) = (z - \lambda)^2$, so werden durch

$$y(t) = \alpha e^{i\lambda t} + \beta t e^{i\lambda t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \tag{13.3b}$$

alle Nullstellen der homogenen Differentialgleichung (13.2) beschrieben. **Überprüfen Sie** diese Aussage durch Einsetzen von (13.3) in (13.2).

§14. Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Wie wir schon in §11 gehört haben (und wie Sie es auch am Gymnasium äußerst ausführlich eingeübt haben) liefert der **Hauptsatz der Infinitesimalrechnung** Techniken zur Berechnung von Integralen. Diese Techniken haben alle das Ziel, die **Stammfunktionen** von f zu finden, zum Beispiel mit Hilfe der **Substitutionsregel** oder durch **partielle Integration**. Und hier ist diese Wunderwaffe:

Satz 14.1.
Es seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ stetige Funktionen. Ist F in (a, b) differenzierbar und

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in (a, b), \tag{14.1}$$

dann gilt

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), \tag{14.2}$$

sowie

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) \quad \textit{für alle } x \in [a,b], \tag{14.3}$$

Beweis: Es sei $\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ irgendeine Partition des Intervalls $[a,b]$. Wenden wir den **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** an, **Satz 17.3**, so existiert ein $\xi_j \in (x_j, x_{j+1})$ mit

$$F'(\xi_j) = \frac{F(x_{j+1}) - F(x_j)}{x_{j+1} - x_j}.$$

Wegen (14.1) gilt daher

$$F(x_{j+1}) - F(x_j) = f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) \quad \text{für } j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Durch Addition über alle j folgt hieraus

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j) =: J(\Delta_n).$$

Da f stetig in $[a,b]$ ist, ist f dort auch integrierbar. Nach Definition 11.1 des Riemannschen Integrals ist daher

$$\lim_{|\Delta_n| \to 0} J(\Delta_n) = \int_a^b f(t)dt.$$

Folglich gilt (14.2).
Wenden wir (14.2) an für das Intervall $[a,x]$ (anstelle von $[a,b]$), so folgt sofort (14.3) . ■

Natürlich können Sie aus Satz 14.1 folgern, daß

$$\int_x^b f(t)dt = F(b) - F(x) \quad \text{für alle } x \in [a,b]$$

richtig ist. Oder?

Wichtige Beispiele:

1. Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$ ist

$$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^\alpha \quad \text{für alle } x > 0.$$

Daher gilt nach Satz 14.1

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \text{für alle } a, b > 0.$$

2. Wegen $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$, und $\ln 1 = 0$ ist

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad \text{für alle } x > 0.$$

3. Es ist

$$\int_0^x \cos t \;\; dt = \sin x \quad , \quad \int_0^x \sin t \;\; dt = 1 - \cos x.$$

Definition 14.1.
Es sei D ein reelles Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ in D stetig. Dann heißt $F : D \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f, falls

$$F'(x) = f(x) \quad \textit{für alle "inneren Punkte" } x \in D.$$

Satz 14.2.
Es sei D ein reelles Intervall, $D = [a, b]$, $D = (a, b]$, $D = [a, b)$, oder $D = (a, b)$, wobei $a = -\infty$ und $b = +\infty$ möglich sei. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ in D stetig. Dann wird die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f beschrieben durch

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt \;\; + \;\; C, \quad x \in D, \tag{14.4}$$

wobei x_0 ein beliebiger Punkt aus D ist und C eine beliebige reelle Zahl ist.

Beweis:
1. Wir zeigen, daß jede Funktion der Form (14.4) eine Stammfunktion von f ist:
Sei $x \in (a, b)$, $x + h \in D$ mit $h \neq 0$. Dann ist nach Definition von F

$$F(x + h) - F(x) = \int_{x_0}^{x+h} f - \int_{x_0}^x f$$

und somit $F(x+h)-F(x) = \int_x^{x+h} f$. Nach Satz 11.3 (MWS der Integralrechnung) existiert ein $\xi_h \in (x, x + h)$, so daß $f(\xi_h)h = \int_x^{x+h} f$, und somit ist

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x).$$

Folglich ist F in x differenzierbar und $F'(x) = f(x)$.
Ist $x = a$, so gilt diese Aussage für die rechsseitige Ableitung $F'(a+)$. Ist $x = b$, so gilt diese Aussage für die linksseitige Ableitung $F'(b-)$.

2. Wir zeigen, daß sich die Stammfunktionen von f nur um eine Konstante unterscheiden:

Seien F_1 und F_2 Stammfunktionen von f. Setze $G := F_2 - F_1$. Dann ist $G : D \to \mathbb{R}$ stetig in D und erfüllt $G' = F_2' - F_1' = 0$ in D. Nach Satz 14.1 ist dann für ein $x_0 \in D$

$$G(x) = G(x_0) + \int_{x_0}^{x} G' = G(x_0) \quad \text{für alle } x \in D.$$

Hiermit ist Satz 14.2 vollständig bewiesen. ■

Definition 14.2.
Es sei D ein reelles Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in D. Dann nennt man die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f das **unbestimmte Integral von** f *und schreibt hierfür $\int f$.*

In den **Formelsammlungen** findet man viele Stammfunktionen. Hier ist eine kleine Auswahl. Durch **Differenzieren** können Sie sofort die Richtigkeit dieser Beispiele nachprüfen:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad x > 0, \quad \text{für alle } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, \quad x > 0,$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\int \ln x \;\; dx = x \ln x - x + C, \quad x > 0,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{für } a > 0,\ a \neq 1,$$

$$\int \cos x \;\; dx = \sin x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin x \;\; dx = -\cos x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C, \quad 0 < x < \pi,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad -1 < x < 1$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$\int \tan x \;\; dx = -\ln(\cos x) + C, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

$$\int \cot x \;\; dx = -\ln(\sin x) + C, \quad 0 < x < \pi.$$

Aus dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung gewinnen wir zwei weitere Methoden zur Berechnung bestimmter Integrale,

- die **partielle Integration**
- **Integration durch Substitution**

Satz 14.3. *(***Partielle Integration***)*
Es seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ in $[a,b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Wir schreiben auch

$$\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b := f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Beweis:
Nach der Produktregel ist $(fg)' = f'g + fg'$. Unter Verwendung des Satzes 14.1 für die Funktion $fg : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist daher

$$\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b = \int_a^b (fg)' = \int_a^b f'g + \int_a^b fg',$$

qed ■

Satz 14.4. *(***Integration durch Substitution***)*
Es sei $x : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ in $[\alpha,\beta]$ stetig differenzierbar (in α rechtseitig, in β linksseitig). Es sei B der Bildbereich der Funktion x. Es sei $B \subseteq [a,b]$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in $[a,b]$ stetig. Dann gilt

$$\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt.$$

Etwas einprägsamer können wir dies auch schreiben als

$$\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\frac{dx(t)}{dt}dt.$$

Beweis:
Es bezeichne F eine Stammfunktion von f. Nach der Kettenregel ist dann

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = F'(x(t))x'(t) = f(x(t))x'(t), \quad \alpha \le t \le \beta.$$

Daher folgt aus Satz 14.1 für $g(t) := F(x(t))$ und somit $g'(t) = f(x(t))x'(t)$, daß $g(\beta) - g(\alpha) = \int_\alpha^\beta g'(t)dt$, was äquivalent ist zu

$$F(x(\beta)) - F(x(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt.$$

Andererseits ist F eine Stammfunktion von f. Erneut wegen Satz 14.1 ist

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Ein Vergleich beider Formeln beweist die Aussage des Satzes 14.4. ■

Beispiele:

1. $f(x) = -\cos x$, $g(x) = x$:

$$\int_0^\pi x \sin x \;\; dx = \Big[- x \cos x \Big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \;\; dx = \pi.$$

2. Nach Substitutionsregel ist für $x = t^2$, $x'(t) = 2t$, $x(0) = 0$,$x(1) = 1$,

$$\int_0^1 \frac{t}{1+t^4} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t}{1+(t^2)^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \Big[\arctan x \Big]_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

3. Die Fläche des Halbkreises mit Radius $r > 0$ wird durch die Substitution $x(t) = r \cos t$, $0 \le t \le \pi$, und $x'(t) = -r \sin t$, sowie $x(0) = r$, $x(\pi) = -r$,

$$\begin{aligned} \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \int_\pi^0 (-r \sin t) \sqrt{r^2 - r^2 \cos^2 t} \;\; dt = r^2 \int_0^\pi \sin t \sqrt{1 - \cos^2 t} \;\; dt \\ &= r^2 \int_0^\pi \sin^2 t \;\; dt = \frac{r^2}{2} \int_0^\pi (1 + \cos(2t)) dt = \frac{\pi r^2}{2}. \end{aligned}$$

§15. Das uneigentliche Integral

Die Definition des Riemannschen Integrals in §11 betrachtet nur beschränkte Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf endlichen Intervallen $[a, b]$.
Das **uneigentliche Integral** erweitert diesen Integralbegriff durch **Grenzwertbildung** auf unbeschränkte Funktionen f und unbeschränkte Intervalle. Wir wollen hier einige Beispiele geben.

Beispiele:

1. Wir definieren

$$\int_0^\infty e^{-x} dx := \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \to \infty} \Big[- e^{-x} \Big]_0^b = 1.$$

2. Wir definieren

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx := \lim_{b \to 1-} \int_0^b \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{b \to 1-} \Big[- (1 - x^2)^{1/2} \Big]_0^b = 1.$$

3. Wir definieren
$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} := \lim_{a\to 0+, b\to +\infty} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$$
Nach der Substitution $x(t) := t^2$ wird
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} &= \lim_{\alpha\to 0+, \beta\to +\infty} \int_\alpha^\beta \frac{2t\ \ dt}{\sqrt{t^2}(1+t^2)} \\ &= 2 \lim_{\alpha\to 0+, \beta\to +\infty} \int_\alpha^\beta \frac{dt}{1+t^2} \\ &= 2 \lim_{\alpha\to 0+, \beta\to +\infty} \Big[\arctan t\Big]_\alpha^\beta = 2\frac{\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$

4. Die **Gammafunktion** ist definiert durch das uneigentliche Integral
$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{für } 0 < x < \infty.$$
Insbesondere ist $\Gamma(1) = 1$ und es gilt die Rekursionsformel
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{für } 0 < x < \infty.$$
Hieraus folgt
$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

§16. Tangenten. Das Newton Verfahren zur Berechnung von Nullstellen

Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar. Dann heißt die Gerade (=Polynom vom Grade ≤ 1)

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

die **Tangente an f in x_0**. Offensichtlich ist die Tangente g charakterisiert durch die Eigenschaften

$$g(x_0) = f(x_0) \text{ und } g'(x_0) = f'(x_0).$$

Benutzen Sie das folgende kurze **C**-Programm, um den Graphen einer Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ und ihrer Tangente $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$ zu plotten:

```
/* Plotten.c; */
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
main(){
    FILE *datei1;
    FILE *datei2;
    const float a = -1.0;
    const float b = 1.0;
    const float x0 = 0.3;
    const int plotten=1000;
    float x, y, z, h, y0, z0;
    int i;
    float f(float x)
    {
        return sqrt(1.0-x*x);
    }
    float ableit(float x)
    {
        return -x/sqrt(1.0-x*x);
    }
    datei1=fopen("funktion","w");
    datei2=fopen("tangente","w");
    h = (b-a)/plotten;
    y0=f(x0);
    z0=ableit(x0);
    for (i=0;i<=plotten;i++)
    {
        x = a+i*h;
        y = f(x);
```

```
        z = y0 + z0*(x-x0);
        fprintf(datei1,"%4.6f   %4.6f\n",x,y);
        fprintf(datei2,"%4.6f   %4.6f\n",x,z);
    }
    fclose(datei1);
    fclose(datei2);
}
```

Mit Hilfe von **Gnuplot** können Sie nun die Graphen von f und der Tangente ausplotten durch den Befehl

```
plot "funktion" with lines, "tangente" with lines
```

Das Newtonverfahren zur Bestimmung von Nullstellen:
Mit Hilfe von **Tangenten** kann man sehr effektiv die Nullstellen einer stetig differenzierbare Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ausrechnen:
Sei $\zeta \in (a, b)$ eine Nullstelle von f. Um ζ zu finden, wählen wir einen Startpunkt $x_0 \in (a, b)$. Die Tangente an f in x_0 ist gegeben durch $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Ist $f'(x_0) \neq 0$, so besitzt diese Tangente die Nullstelle

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Liegt x_1 in (a, b), so bilden wir die Tangente an f in x_1 und berechnen deren Nullstelle

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

und so weiter. Ist $f'(\zeta) \neq 0$ und liegt der Startpunkt x_0 nahe genug bei ζ, so konvergiert die Folge $(x_k)_{k=0}^{\infty}$,

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{16.1}$$

schnell gegen die Nullstelle ζ. Liegt der Startpunkt x_0 zu weit von ζ entfernt, so kann x_1 oder ein späteres x_k außerhalb von (a, b) liegen oder die Folge $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ kann divergieren.

Bemerkung: Wenden wir das Newtonverfahren (16.1) an für die Funktion $f(x) = x^2 - a$ mit $a > 0$ und Startpunkt $x_0 = 1$, so erhalten wir aus (16.1) wegen $f'(x) = 2x$ die Rekursionsformel

$$x_{k+1} := x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

des **Babylonischen Wurzelziehens**.

Um das Newtonverfahren in **C** zu programmieren, müssen wir daher das frühere Programm "wurzel.c" nur wenig ändern. Hier ist eine *abgespeckte Version*, die die Nullstelle von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ im Intervall $(0, 1)$ berechnet. Eine solche Nullstelle in $(0, 1)$ existiert wegen $f(0) = -1$ und $f(1) = 2$.

```
/* newton.c; */
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#include<stdlib.h>
main(){
    const float x0=0.5;
    const int n = 20;
    int k ;
    double x[100];
    float f(float x)
    {
        return x*x*x - 3.0*x*x + 5.0*x - 1.0;
    }
    float ableit(float x)
    {
        return 3.0*x*x-6.0*x+5.0;;
    }
    x[0]=x0;
    for (k=0;k<=n-1;k++)
    {
        x[k+1]= x[k] - f(x[k])/ableit(x[k]);
        printf("x[%2d]=     %2.8f\n",k+1,x[k+1]);
    }
    printf("f(x[n])=     %2.8f\n",f(x[n]));
}
```

§17. Extrema von Funktionen, Satz von Rolle, Mittelwertsatz der Differentialrechnung,

Wir sagen, daß die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in (a, b)$ ein **relatives Minimum** besitzt, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so daß für die δ-Umgebung

$$U_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$$

von x_0 die Aussage

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{für alle } \ x \in U_\delta(x_0) \cap D \ \text{ gilt.}$$

Analog definieren wir **relative Maxima** von f.

Ist f in (a, b) differenzierbar, so liefert der folgende Satz eine **notwendige** (aber keine hinreichende) Bedingung für ein **relatives Extremum**.

Satz 17.1.
Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in (a, b) differenzierbar und besitzt f in $x_0 \in (a, b)$ ein relatives Minimum oder Maximum, so ist

$$f'(x_0) = 0.$$

Beweis: Sei x_0 ein relatives Minimum von f. Dann ist

$$f'(x_0) = f'(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

da $f(x) \geq f(x_0$ und $x < x_0$. Des weiteren ist

$$f'(x_0) = f'(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

da nun $f(x) \geq f(x_0$ und $x > x_0$. Folglich ist $f'(x_0) = 0$. ■

Wir wollen nun zwei wichtige Anwendungen dieses einfachen Satzes beweisen:

Satz 17.2. (Satz von Rolle)
Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar, und gilt $f(a) = f(b)$, dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis: Nach Satz 6.3 von Weierstraß besitzt f in (a, b) ein **absolutes Maximum** ξ oder ein **absolutes Minimum** ξ, das natürlich auch ein relatives Maximum oder Minimum ist. Für dieses ist nach Satz 17.1 $f'(\xi) = 0$. ■

Aus dem Satz 17.2 von Rolle folgt : Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in (a, b) differenzierbar und hat f in (a, b) n Nullstellen, so besitzt deren 1.Ableitung f' in (a, b) mindestens $n - 1$ Nullstellen.

Beim Beweis des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung, Satz 14.1, haben wir den folgenden Satz verwendet:

Satz 17.3. (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar, so existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis: Wende den letzten Satz 17.2 an auf die Funktion

$$g(x) = f(x) - \frac{(x-a)}{(b-a)}\Big(f(b) - f(a)\Big).$$

Denn es ist $g(a) = g(b) = f(a)$. Folglich existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $g'(\xi) = 0$. Für dieses ξ ist

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

woraus die Aussage des Satzes 17.3 folgt. ■

§18. Der Taylorsche Satz, Taylor-Reihen

Wir haben in §16 die Tangente an eine differenzierbare Funktion f im Punkt x_0 berechnet durch

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Diese Tangente ist die Gerade, die im Punkt x_0 denselben Funktionswert und dieselbe 1. Ableitung wie f besitzt. Ist f sogar zweimal differenzierbar, so wird durch

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

die Parabel (= algebraisches Polynom vom Grad ≤ 2) berechnet, die im Punkt x_0 denselben Funktionswert und dieselbe 1. und 2. Ableitung wie f besitzt. Durch Differenzieren können Sie sofort nachprüfen, daß durch

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

das algebraische Polynom P_n vom Grad $\leq n$ bestimmt wird mit

$$P_n(x_0) = f(x_0) \quad , \quad P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \;\text{ für } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Der folgende Taylorsche Satz gibt Auskunft, wie groß die *Fehlerfunktion* $R_n := f - P_n$ ist:

Satz 18.1. *(***Taylorscher Satz** *)*
Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt für alle $x_0 \in (a,b)$ und alle $x \in (a,b)$ die Gleichung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x,x_0)$$

mit dem Restglied
(a) in Integralform

$$R_n(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt,$$

(b) in der Lagrangeschen Form

$$R_n(x,x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_{x,x_0}) \quad \textit{für ein geeignetes } \xi_{x,x_0} \in (x_0,x).$$

Beweis:
Wir beweisen zunächst (a) durch vollständige Induktion nach n:
$n = 0$: nach dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung ist

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x_0) + \frac{1}{0!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^0 f'(t)dt.$$

Also gilt (a) für $n = 0$.
Es sei nun (a) richtig für ein $n \geq 0$. Durch partielle Integration folgt dann

$$\begin{aligned} R_n(x,x_0) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \\ &= \frac{1}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t)\right]_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t)dt \\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)dt \\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + R_{n+1}(x,x_0). \end{aligned}$$

Also hat auch $R_{n+1}(x,x_0)$ die gewünschte Gestalt (a).

Die Lagrangesche Form (b) des Restgliedes folgt sofort aus (a):
Die Funktion $g(t) = (x-t)^n$ ändert im Intervall (x_0,x) nicht ihr Vorzeichen. Daher können wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden für das Integral

$$R_n(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Dann existiert ein $\xi_{x,x_0} \in (x_0, x)$ mit

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{x,x_0})}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{x,x_0})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Also gilt auch (b). ■

Beispiele:

1. $f(x) = \sin x$ und $x_0 = 0$: Wegen

$$f(0) = 0, \;\; f'(0) = \cos 0 = 1, \;\; f^{(2k)}(0) = 0, \;\; f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

ist nach Satz 18.1

$$\sin x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}(-1)^{n+1} \sin \xi_{x,0}$$

für ein geeignetes $\xi_{x,0} \in (0, x)$.

2. $f(x) = \sqrt{1+x}$ und $x_0 = 0$: Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \quad , \quad f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} \quad , \quad f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2},$$

und somit

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}\Big(1 + \xi_{x,0}\Big)^{-5/2}.$$

Folglich ist für $0 < x < 1$

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}.$$

Lassen wir in Satz 18.1 n gegen ∞ streben, so gewinnen wir

Satz 18.2.
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in (a, b) beliebig oft differenzierbar. Seien $x_0 \in (a, b)$ und $x \in (a, b)$. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{18.1}$$

genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x, x_0) = 0.$$

Die Reihe in (18.1) heißt **Taylorreihe** *von f in x_0.*

Beispiele:

1. $f(x) = \sin x$ und $x_0 = 0$: Wegen
$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x \quad , \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$$
ist $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$, und somit
$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+1}(x,0)$$
mit
$$R_{2n+1}(x,0) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi_{x,x_0}) \quad \text{für ein geeignetes } \xi_{x,0} \in (0,x).$$
Folglich ist
$$|R_{2n+1}(x,0)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

2. $f(x) = \ln(1+x)$ und $x_0 = 0$: Es ist
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad , \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad , \quad f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$
Daher ist für $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$
$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x,0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + R_n(x,0)$$
mit
$$|R_n(x,0)| = \frac{1}{n!} \Big| \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \Big| = \Big| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt \Big|.$$
Rechnen Sie nach, daß
$$|R_n(x,0)| \to 0 \quad \text{für } -1 < x < 1 \text{ gilt.}$$
Somit haben Sie bewiesen, daß
$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \quad \text{für } -1 < x < 1.$$
Im Grenzfall $x \to 1-$ ergibt dies das uns schon lange bekannte Resultat
$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

3. Als weiteres Beispiel betrachten wir die Funktion $f(x) = (1+x)^\alpha$ in $-1 < x < 1$ und $x_0 = 0$:
Beweisen Sie den folgenden Satz.

Satz 18.3.
Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Dann gilt für alle* $-1 < x < 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots,$$

wobei wir definieren

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j), & k \in \mathbb{N} \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

Insbesondere ist für $\alpha = 1/2$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \cdots \quad \text{für } -1 < x < 1.$$

§19. Die Regel von l'Hospital

Bei der Berechnung von Grenzwerten

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

hat man häufig die fatale Situation, daß

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \text{und gleichzeitig} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

ist. Oder bei der Berechnung von

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x),$$

daß

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \text{und gleichzeitig} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

ist. Dann helfen oft die beiden folgenden Sätze über die Regel von **l'Hospital**:

Satz 19.1.
Sei $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. *Es seien* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *und* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *in* $[a,b]$ $(n+1)$*-mal stetig differenzierbar (in* a *rechtsseitig und in* b *linksseitig differenzierbar) und es gelte*

$$f(a+) = \cdots = f^{(n)}(a+) = 0 \quad , \quad g(a+) = \cdots = g^{(n)}(a+) = 0, \quad g^{(n+1)}(a+) \neq 0.$$

Dann ist

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(a+)}{g^{(n+1)}(a+)}.$$

Die analoge Aussage gilt für die linksseitigen Grenzwerte in b, oder die Grenzwerte in $x_0 \in (a,b)$.

Beweis: Nach Satz 18.1 existiert zu $a < x < b$ ein $\xi_x \in (a,x)$ und $\eta_x \in (a,x)$, so daß

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)}{g(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\eta_x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{g^{(n+1)}(\eta_x)} \quad \to \quad \frac{f^{(n+1)}(a+)}{g^{(n+1)}(a+)} \quad \text{für } x \to a+.$$

Der Beweis für $x \to b-$ oder $x \to x_0$, $x_0 \in (a,b)$, verläuft analog. ■

Satz 19.2.
Sei $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Es seien $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ und $g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ in $[a,\infty)$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar und es gelte

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \cdots = \lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \cdots = \lim_{x\to+\infty} g^{(n)}(x) = 0,$$

sowie

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(n+1)}(x) =: \alpha \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} g^{(n+1)}(x) =: \beta, \quad \beta \neq 0.$$

Dann ist

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Die analoge Aussage gilt für die Grenzwerte in $-\infty$.

Beweis: Nach Satz 18.1 existiert zu jedem $x \geq a$ ein $\xi_x \in (x, x+1)$ und $\eta_x \in (x, x+1)$, so daß

$$\frac{f(x+1)}{g(x+1)} = \frac{f(x) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}}{g(x) + \cdots + \frac{g^{(n)}(x)}{n!} + \frac{g^{(n+1)}(\eta_x)}{(n+1)!}}$$

$$= \frac{f(x)(n+1)! + \cdots + f^{(n)}(x)(n+1) + f^{(n+1)}(\xi_x)}{g(x)(n+1)! + \cdots + g^{(n)}(x)(n+1) + g^{(n+1)}(\eta_x)} \quad \to \quad \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{für } x \to \infty.$$

Der Beweis für $x \to -\infty$ verläuft analog. ■

Beispiele:

1. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a. \tag{19.1}$$

Beweis: Wir substituieren $x = 1/t$. Dann ist

$$\ln\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\right] = x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) = \frac{\ln(1+at)}{t}$$

Für $x \to +\infty$ konvergiert $t \to 0+$. Nach Satz 19.1 für $f(t) = \ln(1+at)$ und $g(t) = t$ ist dann

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left[\left(1+\frac{a}{x}\right)^x\right] = \lim_{t\to 0+} \frac{\ln(1+at)}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{\frac{a}{1+at}}{1} = a.$$

Wegen der Stetigkeit der e-Funktion gilt daher (19.1). ■

2. Es ist

$$\lim_{x\to\infty} \left((1+x)^{1/3} - x^{1/3}\right) = 0.$$

Beweis: Wir substituieren $x = 1/t^3$. Dann ist

$$(1+x)^{1/3} - x^{1/3} = \frac{(t^3+1)^{1/3} - 1}{t} := \frac{f(t)}{g(t)}.$$

Wegen $f'(t) = \frac{1}{3}(t^3+1)^{-2/3} * 3t^2 \to 0$ für $t \to 0+$ und $g'(t) = 1$ folgt aus Satz 19.1

$$\lim_{x\to\infty} \left((1+x)^{1/3} - x^{1/3}\right) = \lim_{t\to 0+} \frac{f'(t)}{g'(t)} = 0.$$

§20. Folgen und Reihen von Funktionen

Es sei $D = [a,b]$, $D = [a,b)$, $D = (a,b]$ oder $D = (a,b)$ ein reelles Intervall und es sei $f_n : D \to \mathbf{K}$ mit $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Funktionen. Die Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ kann

(a) **punktweise** gegen eine Funktion $f : D \to \mathbf{K}$ konvergieren, das heißt, für jedes $x \in D$ ist

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

oder

(b) **gleichmäßig in** D konvergieren, das heißt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f(x) - f_n(x)| = 0,$$

oder

(c) in der "L_2-Norm" gegen f konvergieren, daß heißt,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 dx = 0.$$

Beispiel: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } -1 \le x \le 0 \\ nx, & \text{für } 0 < x \le 1/n \\ 1, & \text{für } 1/n < x \le 1. \end{cases}$$

Offensichtlich ist jede Funktion f_n stetig in $[-1,1]$. Prüfen Sie nach, daß die Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$

(a) punktweise in $[-1,1]$ gegen die Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } -1 \le x \le 0 \\ 1, & \text{für } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

konvergiert,

(b) **nicht** gleichmäßig gegen f konvergiert, (was sofort aus dem nächsten Satz folgt, da f unstetig im Punkte $x = 0$ ist),

(c) in der L_2-Norm gegen f konvergiert.

Unter den vielen Sätzen über die Konvergenz von Funktionenfolgen und Funktionenreihen will ich nur einen wichtigen Satz herausgreifen:

Satz 20.1.
Konvergiert die Folge stetiger Funktionen $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ **gleichmäßig** *in* $[a,b]$ *gegen eine Funktion* $f : [a,b] \to \mathbf{K}$, *so ist* f *stetig in* $[a,b]$.

Beweis: Es bezeichne

$$\varepsilon_n := \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - f_n(x)|.$$

Für $x, x_0 \in [a,b]$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\le \varepsilon_n + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \varepsilon_n \end{aligned}$$

und somit wegen der Stetigkeit von f_n

$$\limsup_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| \le 2\varepsilon_n.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ folgt hieraus, daß

$$\lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0,$$

also die Stetigkeit von f in x_0. ■

§21. Fourierreihen

In der Physik spielen periodische Vorgänge (Schwingungen, Wechselstrom, etc.) eine große Rolle. Solche Vorgänge werden durch **periodische Funktionen** beschrieben. Wir sagen

$f : I\!R \to I\!R$ oder $f : I\!R \to C$ hat die Periode $T > 0$, falls $f(x+T) = f(x)$ für alle $x \in I\!R$ erfüllt ist.

Die wichtigsten Vertreter T-periodischer Funktionen sind die reellwertigen

$$1, \cos\frac{2\pi x}{T}, \sin\frac{2\pi x}{T}, \cos\frac{4\pi x}{T}, \sin\frac{4\pi x}{T}, \ldots, \cos\frac{2\pi kx}{T}, \sin\frac{2\pi kx}{T}, \quad k \in \mathbb{N},$$

und die komplexwertigen

$$e^{2\pi ikx/T}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Der Einfachheit wegen besprechen wir nun die periodischen Vorgänge der Periode $T = 2\pi$. Dann sind die **Grundschwingungen** gegeben durch

$$\mathbf{B} := \Big\{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \ldots, \cos(kx), \sin(kx), \ldots, \quad k \in \mathbb{N}\Big\},$$

und im Komplexen durch

$$\mathbf{B}^{\mathbb{C}} = \Big\{e^{ikx}, \quad k \in \mathbf{Z}\Big\}.$$

Wie Sie schon lange wissen, folgen aus den Formeln

$$\begin{aligned} e^{ikx} &= \cos(kx) + i\sin(kx), \\ e^{-ikx} &= \cos(kx) - i\sin(kx), \end{aligned} \qquad k \in \mathbf{Z},$$

die Formeln

$$\begin{aligned} \cos(kx) &= \frac{1}{2}\Big(e^{ikx} + e^{-ikx}\Big), \\ \sin(kx) &= \frac{1}{2i}\Big(e^{ikx} - e^{-ikx}\Big), \end{aligned} \qquad k \in \mathbb{N},$$

und umgekehrt.

Zeigen Sie, daß ein Polynom T der Form (21.1) genau dann reell ist, wenn $c_0 \in \mathbb{R}$ und $c_{-k} = \overline{c_k}$ für $k = 1, 2, \ldots, n$ erfüllt sind.

Die **reellen trigonometrischen Polynome** vom Grad $\le n$ beschreiben wir durch

$$\mathcal{T}_n = \Big\{T : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \quad T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}\Big\},$$

und die **komplexen trigonometrischen Polynome** vom Grad $\leq n$ durch

$$\mathcal{T}_n^{\mathbb{C}} = \Big\{T : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \quad c_k \in \mathbb{C}\Big\}. \tag{21.1}$$

Des weiteren bezeichnen wir mit

$$\mathbf{R} := \Big\{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} : \ f \quad \text{ist integrierbar in } [0, 2\pi]\Big\},$$
$$\mathbf{R}^{\mathbb{C}} := \Big\{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} : \ \mathbf{Re}(f) \in \mathbf{R}, \ \mathbf{Im}(f) \in \mathbf{R}\Big\}.$$

Satz 21.1. *Es ist*

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx}\overline{e^{i\ell x}}dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{falls } k = \ell,\ k \in \mathbf{Z} \\ 0, & \text{falls } k, \ell \in \mathbf{Z},\ k \neq \ell. \end{cases}$$

Und es ist

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\sin(\ell x)dx = 0 \quad \text{für alle } k, \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(\ell x)dx = \begin{cases} \pi, & \text{falls } k = \ell,\ k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{falls } k, \ell \in \mathbb{N},\ k \neq \ell \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(\ell x)dx = \begin{cases} \pi, & \text{falls } k = \ell,\ k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{falls } k, \ell \in \mathbb{N},\ k \neq \ell, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx)dx = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} \sin(kx)dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Rechnen Sie die Integrale doch einfach nach. ■

Wegen des Satzes 21.1 sagen wir:

" Die Funktionen **B** bilden ein **reelles Orthogonalsystem** bezüglich des **inneren Produkts**

$$\langle f, g\rangle := \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx,$$

" die Funktionen $\mathbf{B}^{\mathbb{C}}$ bilden ein **komplexes Orthogonalsystem** bezüglich des **inneren Produkts**

$$\langle f, g\rangle := \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Mehr hierüber in Kapitel III, **Lineare Algebra**, im Sommersemester 2002.

Jeder Funktion $f \in \mathbf{R}$ ordnen wir die **reellen** Fourierkoeffizienten

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$
$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

und die n-ten **Partialsummen der Fourierreihe** von f,

$$s_n(f,x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \Big), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{21.2}$$

zu. Ist $f \in \mathbf{R}$ oder $f \in \mathbf{R}^{\mathbb{C}}$, so sind die **komplexen** Fourierkoeffizienten definiert durch

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Die n-Partialsumme der Fourierreihe ist dann

$$s_n(f,x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{21.3}$$

Man kann sofort beweisen (**Sie auch?**), daß die durch (21.2) und (21.3) definierten Funktionen für jedes n übereinstimmen.

Bemerkung zur Numerischen Mathematik: Aus der **Euler-Maclaurinschen Summenformel** kann man schließen, daß die **Trapezregel** ein sehr gutes Verfahren zur Berechnung der Fourierkoeffizienten ist. Der Rechenaufwand kann hierbei merklich reduziert werden durch Anwendung der **Fast Fourier Transform (FFT)**.

Welche Bedeutung haben die Funktionen $s_n(f)$?
Sie sind nicht nur trigonometrische Polynome aus $\mathcal{T}_n$ oder $\mathcal{T}_n^{\mathbb{C}}$, deren Koeffizienten a_k, b_k und c_k nicht von n abhängen, sondern sie haben die folgende Minimaleigenschaft:

Satz 21.2. *Sei $f \in \mathbf{R}$ oder $f \in \mathbf{R}^{\mathbb{C}}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt dann*

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - s_n(f,x)|^2 dx \quad = \quad \min \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x) - T(x)|^2 dx : \quad T \in \mathcal{T}_n^{\mathbb{C}} \right\}.$$

Beweis:
Aus Zeitgründen wollen wir den Beweis dieses Satzes nur für reellwertige Funktionen führen. Es sei $T_n \in \mathcal{T}_n^{\mathbb{C}}$ ein Polynom mit der Minimaleigenschaft

$$\int_0^{2\pi} |f - T_n|^2 \quad = \quad \min \left\{ \int_0^{2\pi} |f - T|^2 dx : \quad T \in \mathcal{T}_n^{\mathbb{C}} \right\}.$$

Wir erkennen sofort, daß T_n reellwertig sein muß, da f reellwertig ist. Sei nun $S \not\equiv 0$ irgendein trigonometrisches Polynom in $\mathcal{T}_n$. Dann definieren wir die Funktion $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$Q(\varepsilon) := \int_0^{2\pi} |f - T_n - \varepsilon S|^2, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} Q(\varepsilon) &= \int_0^{2\pi} (f - T_n - \varepsilon S)^2 \\ &= \int_0^{2\pi} (f - T_n)^2 - 2\varepsilon \int_0^{2\pi} (f - T_n)S + \varepsilon^2 \int_0^{2\pi} (T_n)^2. \end{aligned}$$

Folglich ist Q ein algebraischen Polynom vom Grade 2 in ε. Da T_n minimal ist, besitzt Q in $\varepsilon = 0$ ein Minimum. Somit ist $Q'(0) = 0$, das heißt, es ist

$$\int_0^{2\pi} (f - T_n)S = 0 \quad \text{für alle } S \in \mathcal{T}_n. \tag{21.4}$$

Die Bedingungen (21.4) heißen **Orthogonalitätsbedingungen** des obigen Minimalproblems. Es habe T_n die Form

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \Big(\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx) \Big).$$

Wählen wir in (21.4) $S(x) = \cos(kx)$ für $k = 0, 1, \ldots, n$, dann folgt aus

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - T_n(x)) \cos(kx) dx = 0$$

wegen Satz 21.1 die Gleichung

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx = \int_0^{2\pi} T_n(x) \cos(kx) dx = \pi \alpha_k.$$

Und für $S(x) = \sin(kx)$ folgt aus

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - T_n(x)) \sin(kx) dx = 0$$

die Gleichung

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx = \int_0^{2\pi} T_n(x) \sin(kx) dx = \pi \beta_k$$

für alle $k = 1, \ldots, n$. Damit haben wir bewiesen, daß $T_n = s_n(f)$ ist. ■

Zum Abschluß wollen wir einige wichtige Sätze über das Konvergenzverhalten der n-ten Partialsummen $s_n(f)$ ohne Beweise zusammenstellen.

Satz 21.3. *Sei $f \in \mathbf{R}$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - s_n(f,x)|^2 dx = 0,$$

sowie für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s_n(f,x)^2 dx &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2\right) \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx \quad \textit{(Besselsche Ungleichung)} \end{aligned},$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx \quad \textit{(Parsevalsche Gleichung).}$$

Analoge Aussagen wie in Satz 21.3 gelten auch für die komplexen $s_n(f)$ und deren komplexe Fourierkoeffizienten c_k. Wir wollen auch noch die **punktweise und gleichmäßige Konvergenz** der Folge $(s_n(f))_{n=1}^{\infty}$ diskutieren. Zunächst ein negatives Ergebnis:

Satz 21.4.
Es gibt stetige 2π-periodische Funktionen f mit

$$\lim_{n\to\infty} |s_n(f,0)| = +\infty.$$

Aber die Konvergenz von $s_n(f)$ gegen f ist **gleichmäßig** in $\mathbb{R}$, falls f genügend glatt ist. Dies zeigt unser nächster und letzter Satz:

Satz 21.5.
Sei $q = 0$ oder $q \in \mathbb{N}$. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch und besitze in $\mathbb{R}$ stetige Ableitungen bis zur Ordnung q. Erfüllt $f^{(q)}$ eine Lipschitz-Bedingung der Form

$$|f^{(q)}(x) - f^{(q)}(y)| \leq M|x-y|, \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R},$$

für eine Konstante $M > 0$, dann gilt die gleichmäßige Konvergenz

$$|f(x) - s_n(f,x)| \leq C_q M (n+1)^{-q-1} \ln(n+1) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

mit einer von n und f unabhängigen Konstanten C_q.

Beispiel:
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch, und

$$f(x) := x - \pi \quad \text{für} \quad 0 \leq x < 2\pi.$$

Dann ist f eine ungerade Funktion, und es ist

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi) \cos(kx) dx = 0$$

und

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi) \sin(kx) dx = \frac{2(-1)^{k-1}}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Aus der Parsevalschen Gleichung des Satzes 21.3 folgt wegen $a_k = 0$, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 = \frac{2\pi^2}{3},$$

und somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \pi^2/6,$$

was wir in einer früheren Übungsaufgabe schon bestätigt haben.

Auf Wiedersehen im Sommersemester 2002