

TEILCHENBESCHLEUNIGUNG IN LASERPLASMEN: KINETISCHE SIMULATIONEN

D I P L O M A R B E I T

VON

PATRICK KILIAN



LEHRSTUHL FÜR ASTRONOMIE
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK UND ASTROPHYSIK
JULIUS-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

WÜRZBURG, FEBRUAR 2010

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Theorie	3
1.1 Maxwell-Gleichungen	3
1.2 Plasma	4
1.2.1 Temperatur und thermische Geschwindigkeit	4
1.2.2 Ionisierungsgrad	5
1.2.3 Plasmafrequenz	6
1.2.4 Debye-Länge	6
1.2.5 Magnetisierung	8
1.2.6 Dispersionsrelation	8
1.2.7 Wave Breaking Limit	10
1.2.8 Hybrid-Wellen	11
1.3 Laser	16
1.3.1 Normiertes Vektorpotential	17
1.3.2 Strahlaufweitung und Strahlführung	18
1.4 Beschleunigungsprozesse	19
1.4.1 Fermi-Beschleunigung erster Ordnung	20
1.4.2 Fermi-Beschleunigung zweiter Ordnung	22
1.4.3 Surfatron-Beschleunigung	24
1.4.4 RF-Beschleunigungstechniken	26
2 Experiment	28
2.1 Experimenteller Aufbau	28
2.2 Erzeugung ultrakurzer Laserpulse	29
3 Numerik	33
3.1 Wahl der numerischen Methode	34
3.2 PIC Code	35

3.2.1	Grundlegender Aufbau	35
3.2.2	Formfaktor	37
3.2.3	Boris-Push	40
3.2.4	Stromzuweisung	42
3.2.5	Yee-Gitter	44
3.2.6	EB-Advance	45
3.3	Wahl der Quantisierung	47
3.3.1	Räumliche Gittergröße	47
3.3.2	Zeitliche Schrittweite	47
3.4	Randbedingungen	48
3.4.1	Periodische Ränder	49
3.4.2	Absorbierende Ränder	50
3.5	Startbedingungen	53
3.5.1	Plasma	54
3.5.2	Laser	55
3.6	Methoden zur Parallelisierung	58
3.6.1	MPI	58
3.6.2	CUDA	58
4	Ergebnisse	61
4.1	Surfatron-Beschleunigung	61
4.1.1	Simulationsbedingungen	63
4.1.2	Phasenraumplots	63
4.1.3	Energieverteilung	65
4.1.4	Auflösungsverbesserung	65
4.2	Laser Wakefield Acceleration	67
4.2.1	Simulationsbedingungen	67
4.2.2	Schnittbilder	68
5	Zusammenfassung	73
A	Parameter für Dispersionsrelation	76
B	Parameter für Surfatron-Beschleunigung	78
C	Parameter für LWFA	80

Literaturverzeichnis	88
Danksagung	89
Eigenständigkeitserklärung	90

Einleitung

Teilchenbeschleunigung in Plasmen ist aus mehreren Gründen interessant. Alle effizienten Beschleunigungsmechanismen in der Astrophysik sind Plasmaprozesse; wenn man also die Herkunft und das Verhalten der beobachteten hochenergetischen Teilchen, die die Erde erreichen, verstehen will, ist es sinnvoll sich mit den zugrundeliegenden Beschleunigungsprozessen auseinander zu setzen.

Auch im Labor ist Teilchenbeschleunigung in Plasmen interessant, auch wenn hier andere Prozesse dominieren. Zu diesen Prozessen gehört die Laser Wakefield Acceleration, der erstmals 1979 von Tajima und Dawson [51] vorgeschlagen wurde.

Die Grundidee der Laser Wakefield Acceleration (abgekürzt LWFA) ist recht einfach: Ein kurzer starker Laserpuls erzeugt in einem Plasma eine Plasmawelle und beschleunigt durch die dort auftretenden hohen elektrischen Felder Elektronen bis zu einer Energie von mehreren Gigaelektronenvolt.

Die exakte Wechselwirkung zwischen Elektronen und Laserfeld ist dabei extrem nicht-linear und komplex. Dementsprechend wurden seit dem ersten Auftauchen dieses Prozesses tausende Paper veröffentlicht, zahllose Simulationen durchgeführt und die Idee von mehreren unabhängigen Gruppen (zum Beispiel in Berkeley und Eindhoven) experimentell realisiert.

Interessant und immer noch Gegenstand theoretischer und praktischer Untersuchungen sind zum Beispiel die optimale Wahl der Form des Laserpulses und der richtigen Bedingungen im Plasma um eine möglichst große Anzahl an Elektronen bei möglichst hoher Energie und kleiner Streuung in Energie und Winkelverteilung zu erzeugen.

Diese schnellen Elektronen könnten für zukünftige Teilchenbeschleuniger, aber auch für Anwendungen in den Materialwissenschaften oder der Medizin interessant werden.

Ein weiterer interessanter Prozess ist die Surfatron-Beschleunigung, bei der Elektronen auf einem longitudinalen elektrischen Feld „reiten“ und so zu hohen Energien beschleunigt werden. Auch diese Art der Teilchenbeschleunigung ist prinzipiell im Labor erreichbar, jedoch nicht so gut untersucht wie LWFA. Dafür sind hier mehr analytische Aussagen möglich. Surfatron-Beschleunigung ist außerdem interessant, da es sich bei

der hocheffizienten Fermi-Beschleunigung, die in der Astrophysik oft behandelt wird, um einen relativistischen Prozess handelt. Um diesen zu ermöglichen müssen die Teilchen also bereits eine Geschwindigkeit ausweisen, bei der erste relativistische Effekte auftreten, also einige Zehntel der Lichtgeschwindigkeit. Möglicherweise ist Surfatron-Beschleunigung der noch fehlende Quellprozess für diese leicht relativistischen Teilchen.

Ein weiterer Grund sich mit diesen im Labor möglichen Prozessen zu beschäftigen ist, daß sie auf überschaubareren Zeit- und Längenskalen stattfinden als die astrophysikalischen Prozesse, die sonst mit Hilfe des ACRONYM Codes simuliert wurden. Beim ACRONYM Code handelt es sich um einen relativistisch korrekten, dreidimensionalen Particle-in-Cell Code, der in der Arbeitsgruppe von Dr. Felix Spanier für astrophysikalische Fragestellungen entwickelt wurde. Stimmen nun die Simulationsergebnisse bei den neuen Problemen mit den experimentellen und theoretischen Ergebnissen überein, dann ist dies natürlich ein deutliches Anzeichen dafür, daß der Code die Plasmaphysik korrekt wiedergibt und die Vorhersagen für die im Labor nicht erreichbaren astrophysikalischen Prozesse korrekt sind.

Prinzipiell ist es auch interessant den PIC-Code als Instrument zum Verständnis für mikroskopische Prozesse im Plasma zu verwenden. Im Code sind einzelne Elektronen im Gegensatz zur Natur unterscheidbar, so daß es leichter zu untersuchen ist aus welchem Raumgebiet die Elektronen stammen, die zu hohen Energien beschleunigt werden. Solche Fragen lassen sich im Experiment nur mit deutlich höherem Aufwand klären. Solche Untersuchungen wurden schon gemacht, sprengen aber den Rahmen dieser Diplomarbeit.

Nach der Motivation soll jetzt noch kurz umrissen werden wie die vorliegende Arbeit aufgebaut ist. Im ersten Kapitel werden die wichtigen Eigenschaften von Plasmen und der verwendeten Laserpulse beschrieben. Ebenfalls betrachtet werden andere Beschleunigungsmechanismen, um einen Vergleich zur LWFA ziehen zu können. Das zweite Kapitel gibt einen kurzen Überblick, wie sich LWFA in Experimenten realisieren lässt. Im dritten Kapitel findet sich eine Einführung in die numerische Untersuchung des Phänomens und eine Motivation, diesen Zugang zu wählen. Das vierte Kapitel stellt die Simulationsergebnisse und ihre physikalische Bedeutung vor. Im fünften und letzten Kapitel werden die Ergebnisse zusammengefasst und durch einen Ausblick auf die noch offenen Fragen ergänzt.

1 Theorie

Dieses Kapitel erläutert die Grundlagen an Plasma- und Laserphysik, die für die weitere Arbeit benötigt werden. Dazu wird zuerst der Zustand eines Plasma definiert, gefolgt von der Definition und Erläuterung der wichtigen Parameter, die ein Plasma beschreiben. In Abschnitt 1.3 werden dann Eigenschaften und Verhalten des Laserpulses behandelt. Im dritten Abschnitt findet sich eine Übersicht über andere Beschleunigungsmechanismen, wie sie aus astrophysikalischen Plasmen und Teilchenbeschleunigern bekannt sind.

1.1 Maxwell-Gleichungen

Grundlage für die Beschreibung des Verhaltens der elektrischen und magnetischen Felder sind die Maxwell-Gleichungen, die in den verwendeten cgs-Einheiten wie folgt aussehen:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \quad (1.4)$$

Gleichung 1.1 ist das allgemeine Induktionsgesetz, das das Entstehen elektrischer Felder aus den Änderungen des magnetischen Feldes beschreibt. Das Ampèresche Gesetz in Gleichung 1.2 beschreibt das Entstehen magnetischer Felder aus Änderungen des elektrischen Feldes und den vorhandenen Strömen. Gleichung 1.3 besagt, daß es keine magnetischen Monopole gibt, Gleichung 1.4 besagt, daß positive und negative Ladungen die Quellen und Senken des elektrischen Felds sind.

1.2 Plasma

Ein Plasma ist ein Vielteilchensystem, dessen Teilchen durch eine starke und langreichweitige Wechselwirkung interagieren. Meist handelt es sich dabei um Elektronen und Ionen, die über die elektromagnetischen Felder aneinander koppeln, und auf diese Plasmen beschränkt sich auch die Diplomarbeit. Exotischere Plasmen wie Quark-Gluonen-Plasmen bleiben unberücksichtigt.

Ein für diese Diplomarbeit interessantes Plasma ist also ein heißes Gas aus positiven und negativen Ladungsträgern, das sich jedoch deutlich anders verhält als ein Gas aus neutralen Teilchen, die nur über kurzreichweitige Kräfte interagieren. So sind etwa neben Schallwellen im Plasma und hochfrequenten elektromagnetischen Wellen, die nicht mit dem Gas wechselwirken, auch Wellenmoden möglich, bei denen Dichteschwankungen und elektromagnetische Felder gekoppelt sind.

Der Übergang zwischen einem Gas aus neutralen Teilchen und einem Plasma, das nur im Mittel neutral ist, ist kein scharfer thermodynamischer Phasenübergang. Mit zunehmendem Ionisierungsgrad verlieren die kurzreichweitigen Kräfte zwischen den Teilchen jedoch ihren Einfluss auf das Verhalten des Plasmas und können zugunsten der kollektiven Wechselwirkung vernachlässigt werden.

Im Folgenden geht es darum, einige Parameter, die ein Plasma beschreiben und sein Verhalten maßgeblich beeinflussen, zu definieren und zu erklären.

1.2.1 Temperatur und thermische Geschwindigkeit

Genau wie in einem Gas ruhen die Teilchen in einem Plasma nicht, sondern bewegen sich mit einer charakteristischen Geschwindigkeitsverteilung. In Abwesenheit äußerer Störungen thermalisiert ein Plasma und man findet die bekannte Maxwell-Boltzmann-Verteilung wieder. Diese besteht aus unabhängigen Gauß-Verteilungen für die drei Geschwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z mit Mittelwert $\mu = 0$ und Standardabweichung σ .

$$\sigma = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} \quad (1.5)$$

Diese Größe hat die Einheiten einer Länge pro Zeiteinheit und wird daher auch gerne als die thermische Geschwindigkeit v_{th} bezeichnet, auch wenn sich natürlich nicht alle Teilchen mit dieser Geschwindigkeit bewegen.

Elektronen thermalisieren auf Grund ihrer geringen Masse relativ schnell und ihre Geschwindigkeitsverteilung stimmt gut mit der Maxwell-Boltzmann-Verteilung überein.

Die sehr viel schwereren Ionen brauchen viel länger zur Thermalisierung. Dies führt dazu, daß die Temperatur der Ionen T_{ion} von der Temperatur der Elektronen T_e abweichen kann. In den meisten Fällen sind die Ionen dann kälter als die Elektronen.

1.2.2 Ionisierungsgrad

Üblicherweise wird der Ionisierungsgrad definiert als $X = \frac{n_i}{n_i + n_n}$ wobei n_i die Zahl der Ionen im Plasma ist und n_n die Zahl der neutralen Teilchen. Alternativ kann auch die Zahl der freien Elektronen n_e in der Definition verwendet werden, da in einem neutralen Plasma die Neutralitätsbedingung gilt:

$$n_e = n_i \quad (1.6)$$

Für Plasmen mit niedrigem Ionisierungsgrad kann dieser ausgehend von der Temperatur T und der Ionisierungsenergie E_{ion} mit Hilfe der Saha-Gleichung abgeschätzt werden. Diese wurde von Megh Nad Saha 1920 zur Erklärung von Sternspektren veröffentlicht (siehe [47]) und erlaubt es, die Temperatur eines Sterns anhand seines Spektrums zu bestimmen. In moderner Notation lautet sie:

$$\frac{n_e^2}{n_n} = \frac{2}{\lambda_{\text{dB}}^3} \frac{g_i}{g_n} \exp\left(-\frac{E_{\text{ion}}}{k_B T}\right) \quad (1.7)$$

Dabei ist λ_{dB} die De-Broglie-Wellenlänge eines Elektrons bei der betrachteten Temperatur, welche gegeben wird durch:

$$\lambda_{\text{dB}} = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi m_e k_B T}} \quad (1.8)$$

Die Größen g_i bzw. g_n bezeichnen den Entartungsgrad der Ionen bzw. neutralen Teilchen. Umgeschrieben als Gleichung für den Ionisierungsgrad erhält man:

$$\left(\frac{X}{1-X}\right)^2 = \frac{1}{n_n} \frac{2}{\lambda_{\text{dB}}^3} \frac{g_i}{g_n} \exp\left(-\frac{E_{\text{ion}}}{k_B T}\right) \quad (1.9)$$

Wenn andere Ionisierungsmechanismen auftreten, wie zum Beispiel die Bestrahlung des Plasmas mit UV-Licht oder Ionisierung auf Grund hohen Drucks, so liefert die Saha-Gleichung natürlich keine korrekten Werte mehr. Auch wenn sich das Plasma (noch) nicht im thermischen Gleichgewicht befindet kann die Abschätzung des Ionisierungsgrades über die Saha-Gleichung falsche Ergebnisse liefern.

1.2.3 Plasmafrequenz

Geht man von einem neutralen Plasma aus und verschiebt ein Elektron aus seiner Ruhelage, so bleibt dort eine positive Nettoladung übrig. Das Elektron wird von dieser angezogen und bewegt sich zu seiner Ausgangslage zurück. Während des Zurückschwingens wächst die Geschwindigkeit des Elektrons jedoch immer weiter, so daß es durch die Ruhelage hindurch schwingt und sich in die entgegengesetzte Richtung entfernt. Dabei wird es dann natürlich von der positiven Nettoladung abgebremst. Wenn die kinetische Energie vollständig in potentielle Energie umgewandelt ist, befindet sich das Elektron genau auf der anderen Seite seiner Ruhelage und wird anfangen zurück zu schwingen. Die Frequenz dieser Schwingung ist:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}} \quad (1.10)$$

Eine einfache Herleitung findet sich in Tonks & Langmuir [52] wo die Plasmafrequenz zum ersten mal veröffentlicht wurde. Diese Frequenz hat einen großen Einfluss auf das Verhalten des Plasmas, da elektromagnetische Wellen unterhalb dieser Frequenz stark gedämpft werden. Die Plasmafrequenz wird auch noch bei der Dispersionsrelation elektromagnetischer Wellen und bei der Wahl der Simulationsparameter auftauchen.

1.2.4 Debye-Länge

Global gesehen ist das Plasma neutral und Ladungsschwankungen gleichen sich rasch aus. Auf sehr kleinen Skalen können jedoch Bereiche auftauchen, die nicht neutral sind. Die typische Längenskala auf der dies möglich ist, ist die Debye-Länge. Diese charakteristische Größe wurde 1923 von Debye und Hückel für Elektrolyte (wo auch frei bewegliche Ladungsträger vorkommen) definiert (siehe Debye & Hückel [19]).

Eine einfache Herleitung der Debye-Länge in Plasmen findet sich in [1]. Diese Herleitung geht davon aus, daß die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen W_e und der Ionen W_i in einem kleinen Volumenelement dV über einen einfachen Boltzmann-Faktor vom elektrostatischen Potential Φ abhängt.

$$W_e(dV) = n_e e^{\frac{e\Phi}{k_B T}} dV \approx \left(1 + \frac{e\Phi}{k_B T}\right) n_e dV \quad (1.11)$$

$$W_i(dV) = n_i e^{-\frac{e\Phi}{k_B T}} dV \approx \left(1 - \frac{e\Phi}{k_B T}\right) n_i dV \quad (1.12)$$

Die Näherung in Gleichung 1.11 und 1.12 gilt für den Fall, daß die thermische Energie gegenüber der Energie im elektrostatischen Potential überwiegt. Dann gilt $e\Phi \ll k_B T$ und man kann die Entwicklung der Exponentialfunktion nach dem linearen Glied abbrechen.

Betrachtet man nun die Ladung in einem Volumenelement, so kann man die Ladungsdichte ρ auch durch die Aufenthaltswahrscheinlichkeit W ausdrücken. Befindet sich ein Teilchen mit einer Wahrscheinlichkeit von zehn Prozent in einem Volumenelement, so bringt dieses Teilchen (im Mittel über viele Teilchen) zehn Prozent seiner Ladung in das Volumenelement ein. Zusammen mit der Neutralitätsbedingung aus Gleichung 1.6 erhält man so:

$$\rho dV = -eW_e(dV) + eW_i(dV) = -\frac{2e^2\Phi}{k_B T} n_e dV \quad (1.13)$$

Gleichung 1.13 gibt einen linearen Zusammenhang zwischen der Ladungsdichte ρ und dem Potential Φ an. Andererseits sind diese beiden Größen auch über die Poisson-Gleichung verknüpft:

$$\Delta\Phi = -4\pi e \rho \quad (1.14)$$

Damit erhält man eine einfache Differentialgleichung für das Potential Φ :

$$\Delta\Phi = \frac{\Phi}{\lambda_D^2} \quad (1.15)$$

Die Konstante λ_D hat dabei die Einheiten einer Länge und ist genau die gesuchte Debye-Länge:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{k_B T}{8\pi n e^2}} \quad (1.16)$$

Die Bedeutung dieser Größe lässt sich besser erkennen, wenn man die Differentialgleichung 1.15 löst. Man erhält folgende kugelsymmetrische allgemeine Lösung:

$$\Phi = \frac{A}{r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}} + \frac{B}{r} e^{\frac{r}{\lambda_D}} \quad (1.17)$$

Da das Potential für den Grenzfall $r \rightarrow \infty$ verschwinden soll, muss die Konstante B Null sein. Nimmt man weiterhin an, daß sich das Potential für kleine Abstände genauso verhalten soll wie in der Umgebung eines einfach positiv geladenen Teilchens, so erhält man:

$$\Phi = \frac{e}{r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}} \quad (1.18)$$

Für sehr kleine Abstände fällt das Potential wie im Vakuum mit $1/r$ ab, für große Abstände aber viel schneller, da die Ladung das Plasma polarisiert. Die entstehende Hülle aus negativ geladenen Teilchen schirmt die positive Ladung ab und lässt das Potential schnell abfallen. Die charakteristische Längenskala, auf der diese Abschirmung stattfindet, ist dabei gerade die Debye-Länge, die angibt, bei welchem Abstand das Potential auf $1/e$ des Werts im Vakuum gesunken ist.

1.2.5 Magnetisierung

Prinzipiell kann ein Plasma durch die Bewegung der geladenen Teilchen magnetisiert sein. Die Stärke der Magnetisierung lässt sich gut über den Parameter β , der das Verhältnis aus thermischen Plasmadruck $p = nk_B T$ und Druck durch das Magnetfeld $p_{mag} = \frac{B_0^2}{2\mu_0}$ ist, beschreiben:

$$\beta = \frac{2 \mu_0 p}{B_0^2} \quad (1.19)$$

Für große Werte von β dominiert die kinetische Bewegung das Verhalten des Plasmas, während für den Fall $\beta \ll 1$ die Teilchen sich nur entlang der Feldlinien bewegen können. Senkrecht zur Feldlinie kann das Teilchen nur eine Gyrationbewegung durchführen. Die in dieser Diplomarbeit verwendeten Plasmen sind jedoch stets unmagnetisiert, also im Bereich $\beta \gg 1$.

1.2.6 Dispersionsrelation

In einem Plasma wechselwirken Teilchen über die elektromagnetischen Felder. Dies führt dazu, daß sich die Bedingungen für die elektromagnetischen Wellen im Vergleich zu Vakuum deutlich ändern. Dort gilt der einfache Zusammenhang $\omega = ck$ zwischen der Kreisfrequenz ω der Welle und dem Betrag des Impulsvektors $k = |\vec{k}|$.

Im Plasma wird diese Dispersionsrelation komplizierter. Für die Herleitung benötigt man außer den beiden Maxwell-Gleichungen 1.1 und 1.2 noch das zweite Newtonsche Gesetz $\vec{F} = m\vec{a}$ und die Lorentz-Kraft 3.2. Aus den letzten beiden Gleichungen erhält man:

$$m \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \quad (1.20)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{e}{m} \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \quad (1.21)$$

$$\approx \frac{e}{m} \vec{E} \quad (1.22)$$

Die Näherung in Gleichung 1.22 gilt dabei für kalte Plasmen ohne Hintergrund-Magnetfeld, in denen die Phasengeschwindigkeit der Welle sehr viel größer ist als die thermische Geschwindigkeit der Elektronen. Für den Strom erhält man damit:

$$\vec{j} = n e \vec{v} = \frac{n e^2}{m} \vec{E} \quad (1.23)$$

Man kann nun die Maxwell-Gleichung 1.2 auf beiden Seiten einmal nach der Zeit ableiten und den Strom aus Gleichung 1.23 einsetzen. Die Zeitableitung des magnetischen Feldes ersetzt man dabei anhand der zweiten Maxwell-Gleichung. Übrig bleibt dann die folgende Gleichung für das elektrische Feld.

$$\nabla \times \left(-c \left(\nabla \times \vec{E} \right) \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi n e^2}{c m} \vec{E} \quad (1.24)$$

Wählt man nun eine Welle die in z -Richtung propagiert und deren elektrisches Feld in x -Richtung liegt, also $\vec{E} = E_x e^{i(kz - \omega t)}$ erfüllt, so erhält man:

$$-ck^2 E_x = \frac{1}{c} (i\omega)^2 E_x + \frac{4\pi n e^2}{c m} E_x \quad (1.25)$$

Mit der Definition der Plasmafrequenz aus Abschnitt 1.2.3 erhält man daraus die Dispersionsrelation einer elektromagnetischen Welle in einem kalten Plasma:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2 \quad (1.26)$$

Man sieht an dieser Gleichung recht deutlich, daß sich keine elektromagnetischen Wellen unterhalb der Plasmafrequenz ausbreiten können. Dies ist sofort verständlich, wenn man sich überlegt, daß für diese Wellen die Elektronen dem elektrischen Feld folgen können und dieses exponentiell beim Eindringen in das Plasma dämpfen.

Abbildung 1.1 zeigt die Dispersionsrelation, die man aus einer Simulation erhält. Ein thermisches Plasma mit $v_{th} = 0.1c$ mit $1024 \times 32 \times 32$ Zellen wurde für 4000 Zeitschritte simuliert. (Die restlichen Parameter sind in Anhang A aufgeführt.) Anschließend wurde die Komponente des elektrischen Feldes, die längs einer der kurzen Achsen zeigt, über die y - z -Ebene gemittelt. Die resultierenden Daten im x - t -Raum wurden zeitlich und räumlich fouriertransformiert. So erhält man die gezeigte Dichte im ω - k_x -Raum.

Die erlaubten und thermisch besetzten Moden der elektromagnetischen Wellen gehen klar erkennbar bei $k = 0$ durch $\omega = \omega_p$. Symmetrisch um diesen Punkt steigt ω parabolisch an. Abweichend von Formel 1.26 nähert sich die Dispersionrelation nicht

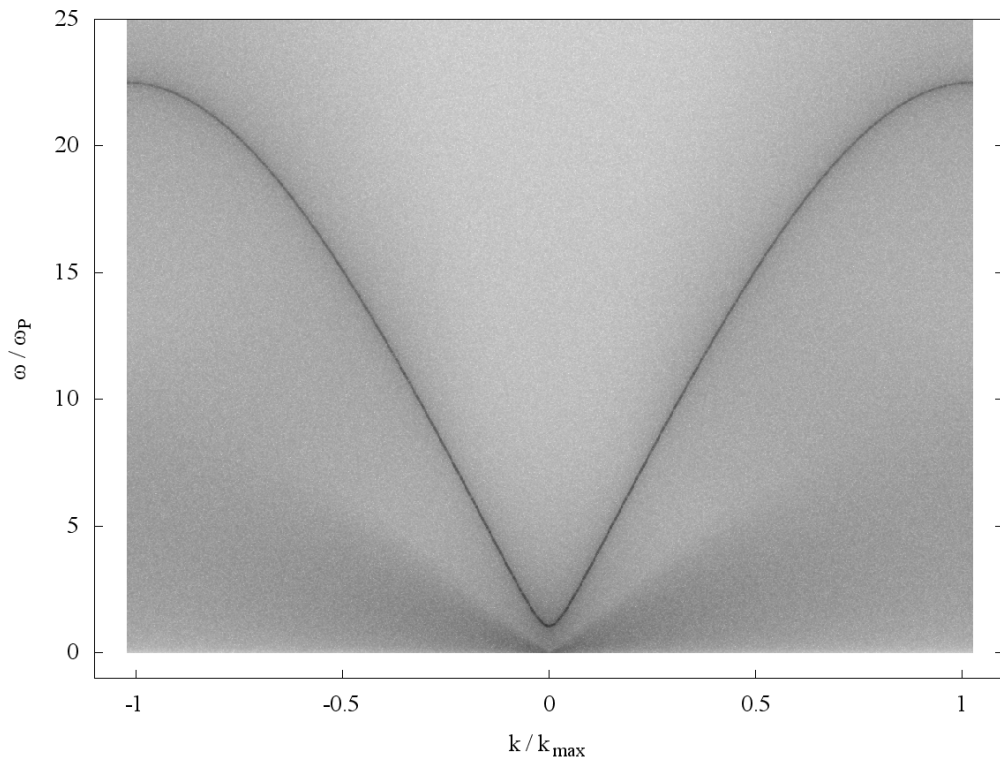


Abbildung 1.1: Dispersionsrelation für elektromagnetische Wellen.

asymptotisch der Winkelhalbierenden, sondern knickt bei hohen Beträgen von k durch numerische Effekte zunehmend ab. Beim maximal möglichen k -Wert, der durch die Größe der Simulationsbox vorgegeben wird, erreicht die Kurve mit verschwindender Steigung die Frequenz $\omega = \frac{1}{2}\omega_{\text{Nyquist}}$.

1.2.7 Wave Breaking Limit

In Abschnitt 1.2.6 wurde gezeigt, daß sich elektromagnetische Wellen nicht bei beliebigen Frequenzen ausbreiten können. Doch auch die Amplitude der Welle unterliegt einer Beschränkung. Überschreitet das elektrische Feld den kritischen Wert E_{max} , so schwingen die Elektronen weit genug aus der Ruhelage um ins nächste Wellental zu gelangen. Dies dämpft die Schwingung stark ab und man sagt „die Welle bricht“. Dieses Verhalten wurde erstmal 1958 von Dawson erkannt und in [18] beschrieben. Für eine nichtrelativistische Welle in einem kalten Plasma erhält man für das kritische elektrische Feld:

$$E \leq \frac{m \omega_p v_{th}}{e} \quad (1.27)$$

Für relativistische Wellen und warme Plasmen erhält man andere Grenzen, die deutlich höher liegen können. Eine gute Übersicht bieten Katsouleas und Mori in [34].

Für den Fall eines warmen, aber nichtrelativistischen Plasmas, wie es für die Surfa-
tronbeschleunigung interessant ist, findet man dort:

$$E \leq \frac{m \omega_p v_{th}}{e} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3}\beta - \frac{8}{3}\beta^{\frac{1}{4}} + 2\beta^{\frac{1}{2}}} \quad (1.28)$$

1.2.8 Hybrid-Wellen

Abschnitt 1.2.6 zeigt die Herleitung für die Dispersionsrelation elektromagnetischer Wellen. Dies ist jedoch nicht die einzige Wellenmode, die im Plasma möglich ist. In Abschnitt 1.4.3 wird eine andere Wellenmode, die obere Hybridschwingung, relevant. Daher soll hier gezeigt werden, wie man mit Hilfe der Methode der harmonischen Analyse aus der Fluidbeschreibung des Plasmas die Existenz und die Eigenschaften dieser Wellenmode berechnen kann.

Für die Beschreibung des Plasmas als Fluid benötigt man außer den Maxwell-Gleichungen aus Abschnitt 1.1 noch einige weitere Gleichungen. Zuerst betrachten wir den Zusammenhang zwischen den Anzahldichten der Elektronen und Protonen und der daraus resultierenden Ladungsdichte, sowie den mittleren Geschwindigkeiten der beiden Teilchenspezies und dem daraus resultierenden Strom.

$$\rho = n_i e - n_e e \quad (1.29)$$

$$\vec{j} = n_i e \vec{u}_i - n_e e \vec{u}_e \quad (1.30)$$

Für jede Spezies α gilt eine Kontinuitäts-Gleichung, die Dichte und mittlere Geschwindigkeit verknüpft:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \vec{u}_\alpha) = 0 \quad (1.31)$$

Als letzte Gleichung benötigt man noch einen Zusammenhang zwischen Änderung der mittleren Geschwindigkeit und der Kraft die im Mittel auf auf Teilchen wirkt. Unter Verwendung der konvektiven Ableitung lässt sich dieses schreiben als:

$$m_\alpha n_\alpha \left(\frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha \right) = q_\alpha n_\alpha \left(\vec{E} + \frac{\vec{u}_\alpha}{c} \times \vec{B} \right) - \nabla p \quad (1.32)$$

Wenn man Wärmetransport vernachlässigen kann, dann ist der Druck durch die fol-

gende Gleichung gegeben:

$$\nabla p = k_B T \nabla n \quad (1.33)$$

Nachdem nun die Beschreibung des Plasmas (im Rahmen der verwendeten Näherungen) komplett ist, ist es als nächstes wichtig, den Ansatz für die harmonische Analyse zu wählen. Für die Hybrid-Mode nimmt man dabei ein Hintergrund-Magnetfeld der Stärke B_0 in z-Richtung, identische Dichte der Ionen n_i und Elektronen n_e an. Elektrisches Feld, Strom und mittlere Geschwindigkeit verschwinden im Mittel.

Desweiteren nimmt man an, daß sich auf diesem Hintergrund eine kleine Störung mit harmonischer Zeitabhängigkeit in x-Richtung ausbreitet. Der vollständige Ansatz lautet damit:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_1 \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)} \quad (1.34)$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)} \quad (1.35)$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)} \quad (1.36)$$

$$n = n_i + n_e + \Delta n e^{i(kx-\omega t)} \quad (1.37)$$

Aus der Gleichung 1.37, die die Dichte-Schwankung der Elektronen Δn enthält, und der Bedingung der Quasineutralität aus Gleichung 1.6 folgt für die Ladungsdichte ρ :

$$\rho = -e \Delta n e^{i(kx-\omega t)} \quad (1.38)$$

Für den Strom \vec{j} gilt:

$$\vec{j} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} \quad (1.39)$$

$$= - (n_e + \Delta n e^{i(kx-\omega t)}) e (\vec{u}_0 e^{i(kx-\omega t)}) \quad (1.40)$$

$$= -e n_e \vec{u}_0 e^{i(kx-\omega t)} - e \Delta n \vec{u}_0 e^{2i(kx-\omega t)} \quad (1.41)$$

$$\approx -e n_e \vec{u}_0 e^{i(kx-\omega t)} \quad (1.42)$$

Der zweite Term in Gleichung 1.41 fällt dabei weg, da er als Produkt zweier kleiner Störungen (Δn und \vec{u}) noch viel kleiner und damit vernachlässigbar ist. Diese Vorgehensweise wird auch im weiteren Verlauf der harmonischen Analyse immer wieder verwendet, um die Zahl der Terme überschaubar zu halten.

Um aus dem Ansatz eine Lösung der Fluid-Beschreibung zu erhalten, müssen jetzt noch acht Größen bestimmt werden. Diese sind die Stärke der Störung im Magnetfeld B_1 , Stärke und Richtung des elektrischen Feldes E_x und E_y , die Stärke der Dichteschwankung Δn , die drei Komponenten des Stroms \vec{u}_0 , also u_x , u_y und u_z und die Kreisfrequenz ω der Welle. Der Betrag k des Wellenvektors $\vec{k} = k\vec{e}_x$ wird dabei als bekannt angenommen. Man erhält dabei natürlich für unterschiedliche k unterschiedliche ω , so daß man am Ende der harmonischen Analyse die Dispersionsrelation $\omega(k)$ untersuchen kann.

Um die noch unbekanntenen Größen zu bestimmen, setzen wir nun das Magnetfeld aus Gleichung 1.34 und das elektrische Feld aus Gleichung 1.35 in das Induktionsgesetz in Form von Gleichung 1.1 ein.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.43)$$

$$i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ kE_y \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)} = \frac{i\omega}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_1 \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)} \quad (1.44)$$

$$\Rightarrow kE_y = \frac{\omega}{c} B_1 \quad (1.45)$$

Genauso setzt man Gleichung 1.34 und Gleichung 1.35 in das Amperesche Gesetz aus Gleichung 1.2 ein.

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (1.46)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -ikB_1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)} = -\frac{i\omega}{c} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)} - n_e e \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)} \quad (1.47)$$

$$\Rightarrow i\omega E_x = -4\pi n_e e u_x \quad (1.48)$$

$$\Rightarrow kB_1 = \frac{\omega}{c} E_y - \frac{4\pi i}{c} n_e e u_y \quad (1.49)$$

$$\Rightarrow u_z = 0 \quad (1.50)$$

Gleichung 1.50 wird im Folgenden auch immer gleich ausgenutzt um unnütze Terme

zu vermeiden. Als nächstes betrachten wir die Kontinuitätsgleichung für Elektronen.

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_e + \Delta n e^{i(kx-\omega t)}) = -\nabla \cdot ((n_e + \Delta n e^{i(kx-\omega t)}) \vec{u}) \quad (1.51)$$

$$-i\omega \Delta n e^{i(kx-\omega t)} = -i n_e k u_x e^{i(kx-\omega t)} \quad (1.52)$$

$$\Rightarrow \omega \Delta n = n_e k u_x \quad (1.53)$$

Als letztes betrachten wir jetzt noch Gleichung 1.32 für den Impuls-Strom. Hier ist vor allem der Term ∇p interessant.

$$\nabla p = \nabla (k_B T (n_e + \Delta n e^{i(kx-\omega t)})) \quad (1.54)$$

$$= k_B T \nabla (\Delta n e^{i(kx-\omega t)}) \quad (1.55)$$

$$= k_B T \Delta n_i k e^{i(kx-\omega t)} \quad (1.56)$$

Setzt man diese Gleichung in Gleichung 1.32 ein und vernachlässigt alle Terme höherer Ordnung, die durch die konvektive Ableitung entstehen, so erhält man:

$$i\omega m_e n_e \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kx-\omega t)} = e n_e \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{e n_e}{c} \begin{pmatrix} u_y B_0 \\ -u_x B_0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_B T \Delta n i k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

$$\Rightarrow i\omega m_e n_e u_x = e n_e E_x - \frac{e n_e}{c} u_y B_0 + k_B T \Delta n i k \quad (1.58)$$

$$\Rightarrow i\omega m_e n_e u_y = e n_e E_y + \frac{e n_e}{c} u_x B_0 \quad (1.59)$$

Mit den Gleichungen 1.45, 1.48, 1.49, 1.53, 1.58 und 1.59 hat man jetzt sechs Gleichungen, um die verbleibenden sieben Parameter zu bestimmen.

Die ersten beiden Gleichungen lassen sich nach E_x und E_y auflösen, womit diese aus den übrigen Gleichungen entfernt werden können. Die nächsten beiden Gleichungen lassen sich nach Δn und B_1 auflösen. Setzt man diese ein, so bleiben zwei Gleichungen für die drei Unbekannten u_x , u_y und ω übrig.

$$i m_e n_e u_x \omega = -\frac{B_0 e n_e u_y}{c} + \frac{4i e^2 n_e^2 \pi u_x}{\omega} + \frac{ik^2 k_B T n_e u_x}{\omega} \quad (1.60)$$

$$i m_e n_e u_y \omega = \frac{B_0 e n_e u_x}{c} - \frac{4i e^2 n_e^2 \pi u_y \omega}{c^2 k^2 - \omega^2} \quad (1.61)$$

Dies lässt sich auch in Form einer Eigenwertgleichung schreiben:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.62)$$

Dabei ist die Matrix \mathbf{A} gegeben durch:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -im_e \omega + \frac{4\pi i n_e e^2}{\omega} + \frac{ik^2 k_{BT}}{\omega} & -\frac{e B_0}{c} \\ \frac{ie B_0}{c} & -im_e \omega - \frac{4\pi i n_e e^2 \omega}{c^2 k^2 - \omega^2} \end{pmatrix} \quad (1.63)$$

Gleichung 1.62 hat nur dann nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante von \mathbf{A} verschwindet. Physikalisch bedeutet diese Bedingung an ω , daß sich nur bestimmte Wellenmoden mit charakteristischem ω ausbreiten. Die Gleichung $|\mathbf{A}| = 0$ liefert ein Polynom vierten Grades in ω und damit auch vier unterschiedliche Lösungen. Es gehören jedoch immer eine positive und eine negative Lösung zusammen, die die vorwärts und rückwärts laufende Welle der gleichen Mode beschreiben.

Für die Hybrid-Welle erhält man:

$$\omega^2(k) = \omega_p^2 + \frac{1}{2} \left(\Omega_e^2 + (c^2 + v_{th}^2) k^2 - \sqrt{((v_{th}^2 - c^2)k^2 + \Omega_e^2)^2 + 4 \Omega_e^2 \omega_p^2} \right) \quad (1.64)$$

Dabei ist Ω_e die Zyklotron-Frequenz der Elektronen im Hintergrund-Magnetfeld:

$$\Omega_e = \frac{e B_0}{m_e c} \quad (1.65)$$

In der Dispersionsrelationen $\omega(k)$ tauchen nur gerade Potenzen von k auf; die Kreisfrequenz ω hängt also nicht vom Vorzeichen von k und damit der Ausbreitungsrichtung der Welle ab. Dies ist auch das physikalisch zu erwartende Verhalten, da sich die Welle im rechten Winkel zum Hintergrund-Magnetfeld ausbreitet und somit keine Vorzugsrichtung für die Ausbreitung vorhanden ist.

Als zweite Lösung erhält man die sogenannte „Extraordinary Wave“, mit der Dispersionsrelation:

$$\omega^2(k) = \omega_p^2 + \frac{1}{2} \left(\Omega_e^2 + (c^2 + v_{th}^2) k^2 + \sqrt{((v_{th}^2 - c^2)k^2 + \Omega_e^2)^2 + 4 \Omega_e^2 \omega_p^2} \right) \quad (1.66)$$

Zur Veranschaulichung zeigt Abbildung 1.2 einen Plot der Dispersionsrelationen. Dabei wurde eine Dichte von $n_i = n_e = 5 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3}$, ein Hintergrund-Magnetfeld von $3 \cdot 10^5 \text{G}$ und eine Elektronen-Temperatur von einem Mega-Kelvin angenommen.

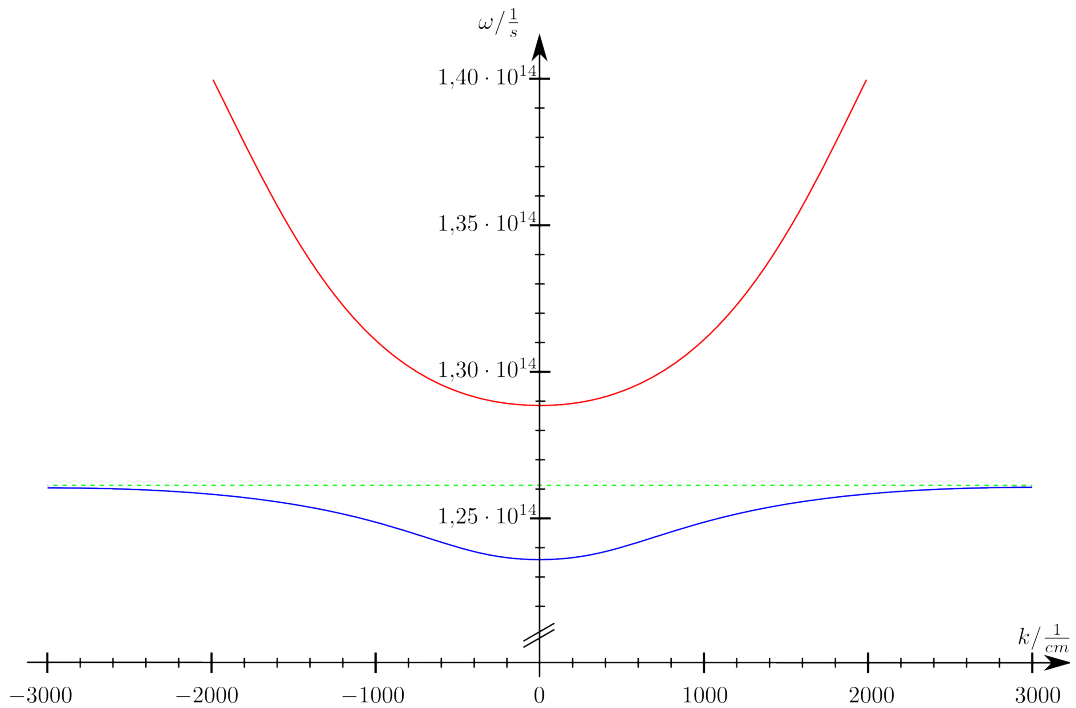


Abbildung 1.2: Dispersionsrelation der Hybrid-Schwingung (in blau) und der „Extraordinary Wave“ (in rot) bei einer Dichte von $n = 1 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3}$, einem Hintergrund-Magnetfeld von $3 \cdot 10^5 \text{G}$ und einer Elektronen-Temperatur von 10^6K . Grün gestrichelt ist die Plasmafrequenz ω_p eingezeichnet.

Am flachen Verlauf der blauen Kurve in Abbildung 1.2 erkennt man sehr deutlich, daß die Gruppengeschwindigkeit der Hybrid-Wave deutlich unter der Lichtgeschwindigkeit liegt. Eine Welle, die eine Gruppengeschwindigkeit von $v_g = c$ aufweist, würde in dieser Darstellung einen Winkel von 80 Grad relativ zur k -Achse aufweisen.

1.3 Laser

Die theoretischen Grundlagen für einen Laser wurden 1917 von Albert Einstein in seiner Veröffentlichung „Zur Quantentheorie der Strahlung“ gelegt. 1960 wurde der Laser von Theodore Maiman erstmals experimentell realisiert (siehe [38]). Seitdem hat das Feld der Laser eine rasante Entwicklung durchgemacht. Inzwischen ist es möglich, Laser aufzubauen, die extrem kurze Pulse im Bereich weniger Femtosekunden erzeugen, und deren Leistungsabgabe im Puls bei einigen Terawatt liegt. Gleichzeitig lässt sich der Laserpuls gut fokussieren, was im Fokus zu extrem hohen Energiedichten führt. Genau diese Bedingungen werden für einen Laser Wakefield Accelerator benötigt.

1.3.1 Normiertes Vektorpotential

Ein geeigneter Parameter, um die Stärke eines Laserpulses anzugeben, ist das normierte Vektorpotential a_0 , auch bekannt als „laser strength parameter“. Definiert wird dieser einheitenlose Parameter meist wie folgt:

$$a_0 = \frac{e A}{m c^2} \quad (1.67)$$

Dabei ist A der Betrag des Vektorpotentials \vec{A} , das über die Beziehung $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ mit dem magnetischen Feld und über $\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ mit dem elektrischen Feld zusammenhängt. Multipliziert mit der Elementarladung e erhält man eine Energie, die mit der Ruheenergie eines Elektrons verglichen wird.

Für einen Laser mit (Mitten-)Frequenz ω kann man diesen Parameter auch in Abhängigkeit vom Betrag der maximalen Feldstärke des elektrischen Felds angeben:

$$a_0 = \frac{e E}{m \omega c} \quad (1.68)$$

Als dritte Möglichkeit kann man die Abhängigkeit von der Intensität des Lasers I und der Wellenlänge λ angeben. Für die Herleitung dieser Formel benötigt man den Zusammenhang zwischen Intensität und elektrischem Feld:

$$I = \frac{c E^2}{8\pi} \quad (1.69)$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{\frac{8\pi I}{c}} \quad (1.70)$$

und den Zusammenhang zwischen ω und der Wellenlänge λ :

$$\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda} \quad (1.71)$$

Setzt man dies in Gleichung 1.68 ein, so erhält man:

$$a_0 = \sqrt{\frac{2 e^2 \lambda^2 I}{\pi m^2 c^5}} \quad (1.72)$$

$$= 8.55 \cdot 10^{-9} \sqrt{\frac{I}{\frac{\text{W}}{\text{cm}^2}} \left(\frac{\lambda}{\mu\text{m}}\right)^2} \quad (1.73)$$

Für die hohen Leistungsdichten von bis zu 10^{18} W/cm^2 und einer Wellenlänge von

circa einem Mikrometer, wie sie bei LWFA verwendet wird, erreicht das normierte Vektorpotential eine Größenordnung von 1.

1.3.2 Strahlaufweitung und Strahlführung

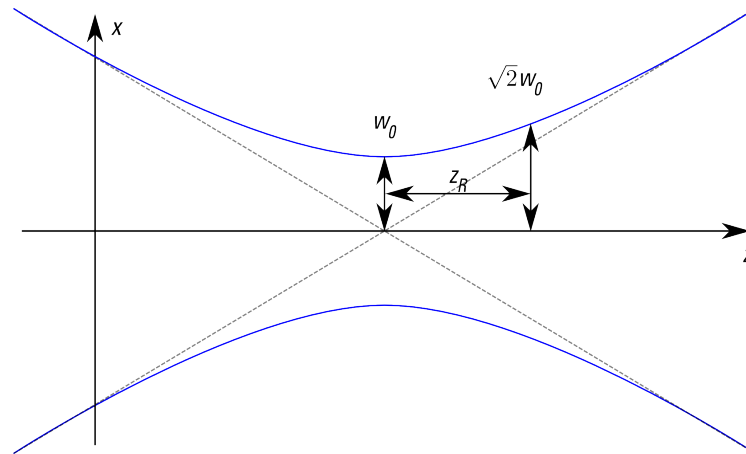


Abbildung 1.3: Skizze zur Definition wichtiger Strahlparameter. Darunter minimaler Strahlradius w_0 und Rayleigh-Länge z_R

Abbildung 1.3 zeigt einen Querschnitt durch einen fokussierten Laserstrahl im Bereich um den Fokus. Weit vom Fokus entfernt verlaufen die Ränder des Strahls effektiv entlang von Geraden, die den Divergenz-Winkel Θ einschließen. Dies entspricht dem Ergebnis der geometrischen Optik. Direkt am Fokus erreicht der Strahl jedoch nicht den Durchmesser Null, der anhand der sich kreuzenden Geraden aus der geometrischen Optik zu erwarten wäre. Der Strahl unterschreitet vielmehr nie einen minimalen Radius w_0 . Damit verschwindet auch das Problem, daß die Intensität unendlich hoch werden müsste, wenn der Strahlquerschnitt verschwindet. Insgesamt erhält man eine Hyperbel, die sich asymptotisch an die Geraden der geometrischen Optik annähert.

In der Realität hat ein Laserstrahl in Querrichtung keine scharfe Grenze. Man definiert daher eine Begrenzung über den Abfall des elektrischen Feldes auf $\frac{1}{e}$ des maximalen Wertes entlang der Achse. Als äquivalente Definition, die auf die gleichen Begrenzungslinien führt, kann man den Abfall der Intensität auf $\frac{1}{e^2}$ verwenden.

Durch das Ansteigen des Radius und damit der Querschnittsfläche hinter der Strahltaile sinkt die Intensität des Lasers. Nach einer Rayleigh-Länge z_R hat sich die Strahlfläche verdoppelt und damit die Intensität (unter Vernachlässigung anderer Verluste) halbiert. Der Radius beträgt hier $\sqrt{2} w_0$.

Sind Radius am Fokus w_0 und die Wellenlänge λ bekannt, so kann man die Rayleigh-Länge z_R wie folgt berechnen:

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (1.74)$$

Mit der sinkenden Leistungsdichte im Strahl sinkt natürlich auch die Stärke der erzeugten Plasmawelle und damit die Beschleunigung der Elektronen. Um zu den erwünschten hohen Energien der Elektronen zu kommen, ist es also nötig das Aufweiten des Laserstrahls zu verhindern. Um dies zu erreichen gibt es zwei Möglichkeiten.

Die erste ist, ein geeignetes Dichteprofil im Plasma zu erzeugen, in dem die Dichte des Plasmas entlang der gewünschten Propagationsrichtung abgesenkt ist und radial ansteigt. In einem solchen Dichteprofil ist der Brechungsindex in der Mitte kleiner als weiter außen und der Laserstrahl wird wie in einer Glasfaser geführt. Ein solches Dichteprofil lässt sich erzeugen, in dem man einen eng fokussierten Laser mit kurzer Wellenlänge entlang der Strahlachse einschießt und das Plasma damit aufheizt. Durch die kurze Wellenlänge weitet sich dieser Vorpuls wesentlich weniger auf. Das Plasma bildet auf Grund der thermischen Expansion ein parabolisches Dichteprofil aus, in dem sich dann der langwelligere aber deutlich stärkere Beschleunigungspuls ohne Aufweitung ausbreiten kann.

Die andere Möglichkeit besteht darin, den Laserpuls so hoher Intensität zu verwenden, daß der Strahl sich aufgrund seiner Auswirkungen auf das Plasma selbst fokussiert. Oberhalb einer kritischen Leistung P_c verdrängt der Laserpuls die Elektronen. Dadurch sinkt die Dichte, und damit der Brechungsindex, was den Laser fokussiert. Eine Herleitung für kurze Pulse, die die sehr viel schwereren Ionen nicht beeinflussen, findet sich bei Sun et al. [49]. Dort findet sich als kritische Leistung für einen Laser der Frequenz ω_L :

$$P_c = 1.68 \cdot 10^{10} \text{ W} \cdot \left(\frac{\omega_L}{\omega_p} \right)^2 \quad (1.75)$$

Dieser Mechanismus lässt sich durchaus auch mit der ersten Methode kombinieren wie zum Beispiel in Borisov et al. [9] gezeigt.

1.4 Beschleunigungsprozesse

Im folgenden werden einige Beschleunigungsprozesse hinsichtlich ihrer Eigenschaften und ihres Vorkommens beschrieben um diese Beschleunigungsprozesse mit der Laser Wakefield Acceleration vergleichen zu können.

1.4.1 Fermi-Beschleunigung erster Ordnung

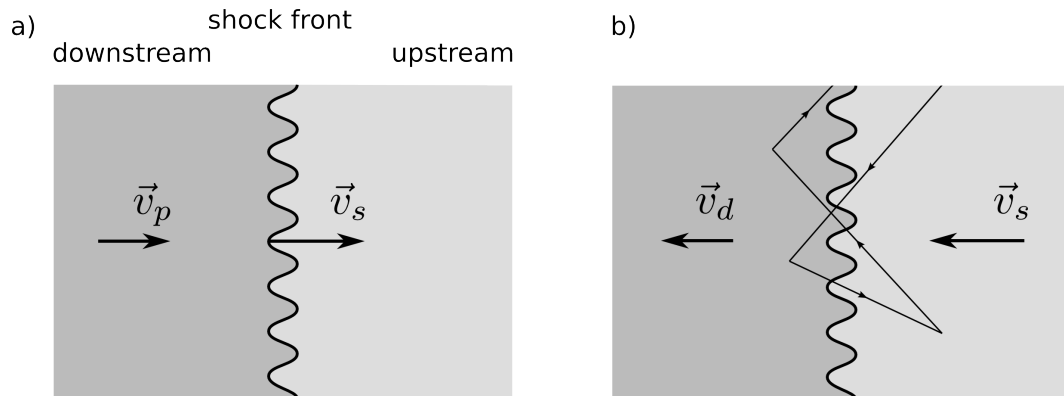


Abbildung 1.4: a) Das Auftreffen des schnelleren downstream Gases auf das ruhende upstream Gas erzeugt eine Schockwelle, die sich mit v_s vorwärts bewegt. b) Im Ruhesystem der Schockfront bewegt sich das upstream Gas mit v_s in die Schockfront hinein und verlässt sie im downstream Bereich mit v_d . Zusätzlich eingezeichnet findet sich der Weg eines Teilchens das mehrfach die Schockfront durchquert und dabei beschleunigt wird.

Trifft ein schneller Gasstrom der Dichte ρ_d auf eine langsamere dichtere Gasmasse mit Dichte ρ_u , so wird das schnellere Gas weiter komprimiert und es bildet sich eine Schockfront aus. Die Geschwindigkeit, die die schnellere Gasmasse (downstream Region) gegenüber der langsameren upstream Region hat, wird im Folgenden mit v_p bezeichnet. Die Geschwindigkeit, mit der sich die entstehende Schockfront ausbreitet, liegt darüber und wird mit v_s bezeichnet. Schematisch dargestellt findet sich diese Region in Abbildung 1.4 a).

Abbildung 1.4 b) zeigt die gleiche Region, aber diesmal im Ruhesystem der Schockfront. Hier bewegt sich das upstream Gas mit v_s in die Schockfront hinein und verlässt diese mit $v_d = v_s - v_p$ im downstream. Da die gleiche Masse pro Zeit in die Schockfront hinein- wie hinausströmen muss gilt:

$$\rho_d v_d = \rho_u v_s \quad (1.76)$$

Das Verhältnis zwischen den beiden Dichten wird als Kompressionsverhältnis R bezeichnet und hängt vom Adiabatenexponent γ des Gases ab. (Man erhält diese Relation aus den Rankine-Hugoniot-Sprungbedingungen, die ihrerseits aus Massen-, Impuls- und

Energie-Erhaltung folgen, siehe z.B. [35].)

$$R = \frac{\rho_d}{\rho_u} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = \frac{v_s}{v_u} \quad (1.77)$$

Damit lässt sich ein Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit der Schockwelle v_s und dem Geschwindigkeitsunterschied der Gasmassen v_p angeben:

$$v_s - v_p = v_d = \frac{v_s}{R} \quad (1.78)$$

$$\Rightarrow v_s = \frac{R}{R-1} v_p \quad (1.79)$$

Für ein einatomiges, nichtrelativistisches Gas ist der Adiabatenexponent $\gamma = \frac{5}{3}$ und damit das Kompressionsverhältnis $R = 4$. Damit breitet sich die Schockwelle ein Drittel schneller aus, als man durch die naive Annahme $v_p = v_s$ erwarten würde.

Ein relativistisches Teilchen kann eine solche Schockfront durchaus mehrfach überqueren, wie in Abbildung 1.4 b) skizziert, und gewinnt dabei im Mittel mit jeder Kollision an Energie. Dieser Prozess wird Fermi-Beschleunigung erster Ordnung oder Schockbeschleunigung genannt. Für die Herleitung (nach [46]) betrachtet man ein Teilchen, das sich relativistisch mit Energie E_1 und Impuls $p_1 \approx \frac{E_1}{c}$ auf die Schockfront zubewegt. Die Schockfront wird als ebene Fläche angenommen und der Winkel zwischen Impuls und der Normalen der Schockfront mit θ_1 bezeichnet. Transformiert man die Energie des Teilchens in das Ruhesystem des Downstreams so erhält man:

$$E'_1 = \gamma_p E_1 - \beta \gamma_p p_x c \quad (1.80)$$

$$= \gamma_p E_1 (1 - \beta \cos \theta_1) \quad (1.81)$$

Dabei ist $\beta = \frac{v_p}{c}$ und $\gamma_p = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ der zugehörige Lorentz-Faktor.

Das Teilchen kann nun im downstream Bereich an einem Teilchen oder einer Schwankung im dortigen Magnetfeld gestreut werden und die Schockfront erneut überqueren. Nimmt man an, daß das Teilchen nach der Streuung die Energie E'_2 hat und die Schockfront unter dem Winkel θ_2 überquert so erhält man für die Energie zurück im Bezugssystem des Upstream:

$$E_2 = \gamma_p E'_2 (1 + \beta \cos \theta_2) \quad (1.82)$$

Unter der Annahme, daß die Streuung elastisch, also ohne Energieverlust stattfindet, kann man $E'_1 = E'_2$ setzen und damit Formeln 1.81 und 1.82 zusammensetzen. (Dies ist für Streuung an Magnetfeldschwankungen erfüllt, Stöße an Teilchen führen durch die

hohen Energien oft zu Kernprozessen und damit unelastischen Stößen). Nimmt man nun noch an, daß das Teilchen im Upstream wieder gestreut wird und sich erneut auf die Schockfront zubewegt, so kann man die Änderung der Energie bei einem vollständigen Umlauf betrachten:

$$\frac{\Delta E}{E_1} = \gamma_p^2 (1 - \beta \cos \theta_1) (1 + \beta \cos \theta_2) - 1 \quad (1.83)$$

Dieser Ausdruck hängt noch von den Winkeln θ_1 und θ_2 ab, wirklich interessant ist aber der mittlere Energiegewinn unabhängig vom konkreten Teilchen. Dafür benötigt man die Mittelwerte $\langle \cos \theta_1 \rangle$ und $\langle \cos \theta_2 \rangle$ für alle Teilchen die die Schockfront durchqueren. Gewichtet man jeden Winkel mit dem Fluß an Teilchen, die die Schockfront unter diesem Winkel durchqueren, so erhält man:

$$\langle \cos \theta_1 \rangle \approx -\frac{2}{3} \quad (1.84)$$

$$\langle \cos \theta_2 \rangle \approx \frac{2}{3} \quad (1.85)$$

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E_1} \right\rangle \approx \frac{4}{3} \beta \quad (1.86)$$

Der Ausdruck für die Änderung der Energie in Formel 1.86 ist erster Ordnung, was auch den Namen des Beschleunigungsmechanismus erklärt. Die Terme höherer Ordnung, die ebenfalls auftreten, können vernachlässigt werden, da $\beta \ll 1$ ist. Die Änderung der Energie ist positiv, die Teilchen werden also beschleunigt; mit steigendem β und damit steigender Geschwindigkeit der Schockfront v_s wird der Energiegewinn immer größer.

1.4.2 Fermi-Beschleunigung zweiter Ordnung

Nach dem gerade erläuterten Beschleunigungsprozess erster Ordnung soll nun auf die ursprüngliche Fermi-Beschleunigung, wie sie 1949 vorgeschlagen wurde, eingegangen werden. Zur Unterscheidung von der Schockbeschleunigung wird dieser Prozess als Fermi-Beschleunigung zweiter Ordnung oder als diffusive Beschleunigung bezeichnet. Fermi selbst ging von Reflexion an magnetischen Spiegel als Streumechanismus aus, spätere Paper wie [32] schlagen resonante Interaktion mit Alfvén-Wellen vor, was aber nichts an der grundlegenden Idee der Herleitung oder dem Ergebnis ändert.

Genau wie in Abschnitt 1.4.1 betrachtet man ein relativistisches Testteilchen mit Energie E_1 und Impuls $p_1 \approx \frac{E_1}{c}$. Dieses trifft auf eine Gaswolke im interstellaren Medium, die sich mit Geschwindigkeit v relativ zum umgebenden Medium bewegt. Transfor-

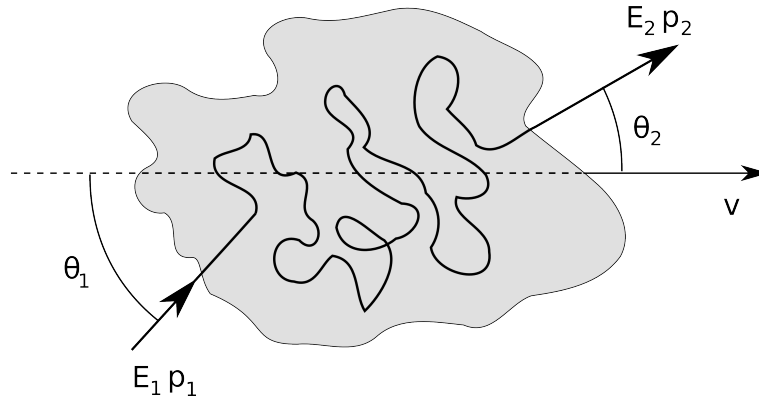


Abbildung 1.5: Ein Teilchen trifft unter einem Winkel von θ_1 auf eine Gaswolke der Geschwindigkeit v und wird darin mehrfach gestreut, bevor es die Wolke unter einer zufälligen Richtung θ_2 wieder verlässt. (Abbildung aus [31])

miert man das Teilchen in das Ruhesystem der Wolke, so hat es dort die Energie $E'_1 = \gamma E_1 (1 - \beta \cos \theta_1)$. Dabei ist $\beta = \frac{v}{c}$ und $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ der zugehörige Lorentz-Faktor der Wolke. Die Rücktransformation ins Laborsystem ergibt $E_2 = \gamma E'_2 (1 + \beta \cos \theta_2)$

Nimmt man elastische Streuung an ($E'_1 = E'_2$), so erhält man für den relativen Energiegewinn:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{1 - \beta \cos \theta_1 + \beta \cos \theta_2 - \beta^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{1 - \beta^2} - 1 \quad (1.87)$$

Auch hier interessiert der mittlere Energiegewinn und dazu benötigt man wieder die gewichteten Mittelwerte über die Winkel. Für den Austrittswinkel θ_2 ist dies recht einfach. Das Teilchen wird in der Wolke mehrfach gestreut, so daß man davon ausgehen kann, daß der Austrittswinkel gleichverteilt ist und $\langle \cos \theta_2 \rangle = 0$ gilt. Für den Mittelwert beim Eintrittswinkel θ_1 muß man berücksichtigen, wie wahrscheinlich eine Kollision zwischen Teilchen und Wolke ist. Diese Kollisionswahrscheinlichkeit P ist dabei bestimmt durch die Relativgeschwindigkeit zwischen Teilchen und Wolke. Für ultrarelativistische Teilchen erhält man $P \approx 1 - \beta \cos \theta_1$. Damit ergibt sich für den Eintrittswinkel:

$$\langle \cos \theta_1 \rangle \approx -\frac{\beta}{3} \quad (1.88)$$

Die mittlere Änderung der Energie ergibt sich damit zu:

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle \approx \frac{4}{3} \beta^2 \quad (1.89)$$

Damit ist auch klar, warum die diffusive Beschleunigung als Fermi-Beschleunigung zweiter Ordnung bezeichnet wird. Das relativistische Teilchen gewinnt zwar Energie ($\langle \frac{\Delta E}{E} \rangle > 0$), aber nur sehr langsam, da β deutlich kleiner als eins ist und quadratisch eingeht. Außerdem funktioniert dieser Beschleunigungsmechanismus, genau wie auch Fermi-Beschleunigung erster Ordnung, nur, wenn das Teilchen schon zu Beginn relativistisch ist.

1.4.3 Surfatron-Beschleunigung

Dieser Beschleunigungsmechanismus wurde 1983 von Katsouleas und Dawson (siehe [33]) vorgeschlagen, vier Jahre nachdem Dawson zusammen mit Tajima den Laser Electron Accelerator vorgeschlagen hat.

Spätere Paper wie McClements et al. [39] weisen darauf hin, daß der Prozess sich im Labor nur schwer realisieren lässt, daß er aber möglicherweise der Quellprozess für die relativistischen Teilchen in Supernova-Überresten ist, die dann durch Fermi-Beschleunigung weiter Energie gewinnen.

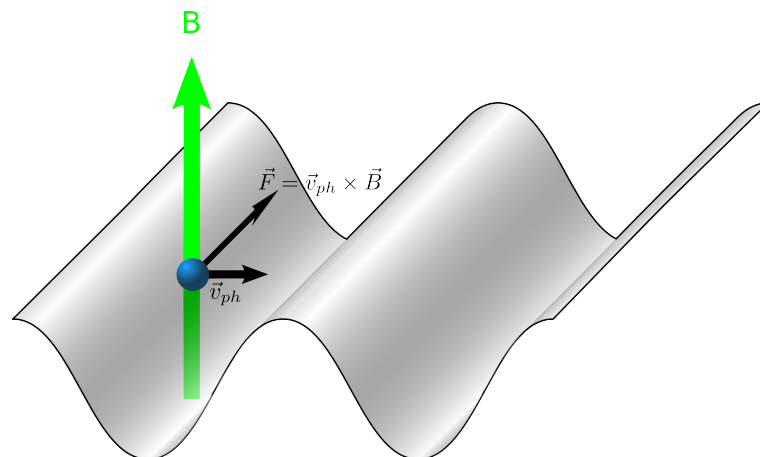


Abbildung 1.6: Das Elektron (blaue Kugel) reitet wie ein Surfer auf der elektrostatischen Welle entlang der x -Achse und wird dabei vom homogenen, konstanten Magnetfeld (grüner Pfeil) abgelenkt und beschleunigt.

Bei der Surfatron-Beschleunigung geht man von einer elektrostatischen Welle und einem Magnetfeld senkrecht dazu aus. Wählt man für das elektrische Feld o.B.d.A. die x -Achse, so erhält man $\vec{E} = E_0 \sin(kx - \omega t) \vec{e}_x$. Dieser Verlauf des elektrischen Feldes ist in Abbildung 1.6 als Welle dargestellt. Das Magnetfeld ist zeitlich und räumlich konstant und liegt entlang der z -Achse, $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$.

Für die Bewegungsgleichungen des Elektrons erhält man:

$$\frac{d}{dt}(\gamma v_x) = \frac{qE_0}{m} \sin(kx - \omega t) + \omega_c v_y \quad (1.90)$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma v_y) = -\omega_c v_x \quad (1.91)$$

mit der üblichen Definition des Lorentz-Faktors γ ($v_z = 0$)

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2} - \frac{v_y^2}{c^2}}$$

und der nichtrelativistischen Zyklotronfrequenz

$$\omega_c = \frac{qB_0}{m c} \quad (1.92)$$

Um das Mitbeschleunigen des Elektrons durch die Welle zu betrachten, berechnet man im Bezugssystem der Welle die Kraft in x -Richtung auf ein Teilchen und erhält:

$$F_x = q \left(E_0 + \gamma_{ph} v_y \frac{B_0}{c} \right) \quad (1.93)$$

Dabei ist $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$ die Phasengeschwindigkeit der elektrostatischen Welle und

$$\gamma_{ph} = \left(1 - \frac{v_{ph}^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

der zugehörige Lorentz-Faktor. Das Teilchen bleibt gefangen solange gilt:

$$E_0 > \gamma_{ph} B_0 \quad (1.94)$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so bewegt sich das Teilchen in x -Richtung etwa mit der Phasengeschwindigkeit der Welle ($v_x \approx v_{ph}$) und man kann die Bewegungsgleichungen lösen. Für die Geschwindigkeit in y -Richtung erhält man so:

$$v_y = - \frac{\omega_c v_{ph} t}{\gamma_{ph} \sqrt{1 + \omega_c^2 t^2 \frac{v_{ph}^2}{c^2}}} \quad (1.95)$$

Asymptotisch strebt die Geschwindigkeit des Teilchens also gegen den Wert $\frac{c}{\gamma_{ph}}$. Betrachtet man den Geschwindigkeitsgewinn nicht in Abhängigkeit von der Zeit, sondern

vom Ort, der im experimentellen Aufbau das limitierende Element ist, so erhält man:

$$\gamma(x) = \gamma_{ph} \sqrt{1 + \frac{\omega_c^2 x^2}{c^2}} \quad (1.96)$$

$$\gamma(y) = \gamma_{ph}^2 \omega_c \frac{v_{ph}}{c} y + \gamma_{ph} \quad (1.97)$$

Für eine Abschätzung der nötigen Beschleunigergröße nehmen wir eine schnelle elektrostatische Welle (genau genommen die obere Hybridwelle) wie sie durch Raman-Vorwärtsstreuung mit einem Laser erzeugt werden kann. Für die Geschwindigkeit dieser Welle erhält man:

$$v_{ph} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}} \approx \frac{\omega_p}{k} \quad (1.98)$$

$$\gamma_{ph} = \frac{\omega_0}{\omega_p} \quad (1.99)$$

Hierbei bezeichnet ω_0 die Frequenz des Lasers und ω_p die Plasmafrequenz. Die Phasengeschwindigkeit v_{ph} ist also nahe an der Lichtgeschwindigkeit c , was für eine effiziente und effektive Beschleunigung sorgt. Nimmt man ein Plasma mit einer Dichte von $n_0 = 10^{19} \frac{1}{\text{cm}^3}$, einen Laser im nahen UV mit einer Wellenlänge von $\lambda = 300 \text{ nm}$ und ein Hintergrund-Magnetfeld von $B_0 = 300 \text{ kG} = 30 \text{ T}$ an, so erhält man:

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = 3 \frac{\text{GeV}}{\text{cm}} \quad (1.100)$$

$$\frac{\Delta U}{\Delta y} = 100 \frac{\text{GeV}}{\text{cm}} \quad (1.101)$$

Um ein Elektron also auf 1 TeV zu beschleunigen, benötigt man also einen Beschleuniger mit einem vier Meter langen und zehn Zentimeter breitem Plasma. Angesichts des nötigen Magnetfelds ist dies nicht trivial, aber doch relativ kompakt.

1.4.4 RF-Beschleunigungstechniken

Bei gewöhnlichen Teilchenbeschleunigern werden die Teilchen durch die elektrischen Felder von stehenden Wellen in Hohlraumresonatoren (im Englischen „RF cavities“) beschleunigt.

Bei einem normalleitenden Resonator wird die stehende Welle durch den nicht verschwindenden Widerstand in Wärme umgewandelt und dadurch gedämpft. Der maximale Beschleunigungs-Gradient ist also hauptsächlich durch die verfügbare Leistung der

Mikrowellengeneratoren, mit denen die Verluste ausgeglichen werden, begrenzt. Zusätzlich betreibt man die Resonatoren üblicherweise gepulst, um der Kühlung zwischen den Pulsen Zeit zu geben, die Wärme abzutransportieren und Schäden an den Hohlräumen zu verhindern. Der Linearbeschleuniger am Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) erreicht mit Kupfer-Resonatoren einen Beschleunigungs-Gradienten von 31 MV/m (siehe [22]).

Alternativ kann man supraleitende Hohlraumresonatoren verwenden. Hier wird das Feld nicht durch Verluste im Material der Wand gedämpft und man ist nicht länger durch die Leistung der Mikrowellengeneratoren begrenzt. Der Large Hadron Collider (LHC) am CERN verwendet Hohlraumresonatoren, die mit Niob beschichtet sind und mit flüssigem Helium gekühlt werden, um die supraleitenden Eigenschaften von Niob aufrechtzuerhalten. Damit wird ein Beschleunigungs-Gradient von 5 MV/m erreicht (siehe [10]). Der geplante Linearbeschleuniger TESLA am DESY in Hamburg soll 25 MV/m erreichen (siehe [3]).

Supraleitende Hohlraumresonatoren sind nicht durch die Verluste des elektrischen Feldes begrenzt, sondern durch den Verlust der Supraleitfähigkeit, wenn das zugehörige Magnetfeld das kritische Magnetfeld des verwendeten Supraleiters überschreitet. Durch die Verwendung anderer supraleitender Materialien, Kühlung deutlich unter die Sprungtemperatur T_c und geeigneter Formgebung lässt sich der Beschleunigungs-Gradient etwas erhöhen, der Rekord liegt aber „nur“ bei 59 MV/m (siehe [29, S. 78]).

Die Studien für den „Compact Linear Collider“ (CLIC siehe [2]) sehen daher normale leitende Hohlraumresonatoren vor, mit denen ein Beschleunigungs-Gradient von 100 bis 150 MV/m erreicht werden soll. Die benötigte Energie für die Hochfrequenzfelder wird dabei von einem Elektronenstrahl mit niedrigerer Energie pro Teilchen und hohem Strom erzeugt, der in speziellen Strukturen abgebremst wird und seine Energie in Form von Mikrowellen abgibt.

Selbst die besten heutigen Teilchenbeschleuniger arbeiten also mit Beschleunigungsraten, die mehrere Größenordnungen unter dem liegen, was LWFA oder Surfatron-Beschleunigung liefern können. Damit ist auch sofort klar, warum sehr enthusiastisch an plasma-basierten Beschleunigerkonzepten geforscht wird.

2 Experiment

Seit Mitte der Neunziger Jahre lässt sich LWFA experimentell realisieren. Als Beispiele seien hier Modena et al. [42] und Nakajima et al. [43] genannt. In diesen Experimenten wurden Beschleunigungsgradienten von über 100 GeV/m und Energien von mehr als 44 GeV gemessen. Dabei gab es jedoch keinen Bunch hochenergetischer Elektronen mit genau definierter Ausdehnung und Energieverteilung. Vielmehr erstreckt sich die Verteilung kontinuierlich bis zu sehr hohen Energien, wobei ab 20 GeV die Anzahl an Teilchen deutlich abnimmt.

Geddes et al. berichten in [26], daß es gelungen ist Elektronen bis zu 86 GeV zu beschleunigen. Die Breite der Energieverteilung betrug dabei nur 1,8 GeV. Desweiteren ist die Divergenz des Elektronenstrahls mit 3 mrad sehr klein und die Anzahl an Elektronen in Bunch mit zwei Milliarden sehr hoch. Solche Eigenschaften sind für eine spätere Anwendung sehr positiv, daher soll der verwendete Aufbau im folgenden Abschnitt als Beispiel für die durchgeführten Experimente etwas näher dargestellt werden.

2.1 Experimenteller Aufbau

Abbildung 2.1 zeigt schematisch den Aufbau, der in [26] beschrieben wird. Das Experiment beginnt ausgehend von einem überschallschnellen Jet aus Wasserstoff, der etwa 2,4 Millimeter lang und etwa zwei Millimeter breit ist, wobei die inneren 1,7 Millimeter eine konstante Dichte von $4,5 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3}$ besitzen.

Ein sogenannter „igniter pulse“, ein 60 Femtosekunden langer Puls mit einer Energie von 15 Millijoule, erzeugt ein Plasmafilament quer durch den Jet. Durch dieses Filament propagiert später auch der Beschleunigungspuls.

Zuvor wird das Plasma jedoch von einem „heater pulse“ aufgeheizt. Der 250 Picosekunden lange Puls mit 150 Millijoule Energie wird dazu von der Seite eingestrahlt und erhitzt das Plasma auf einige Zehn Elektronenvolt. Das heiße Plasma expandiert und bildet ein fast exakt parabolisches Dichteprofil aus, was den Hauptpuls gut zu führen vermag. Die Dichte in der Mitte des Kanals sinkt dabei auf $1,9 \cdot 10^{19} \text{cm}^{-3} \pm 10\%$. Durch

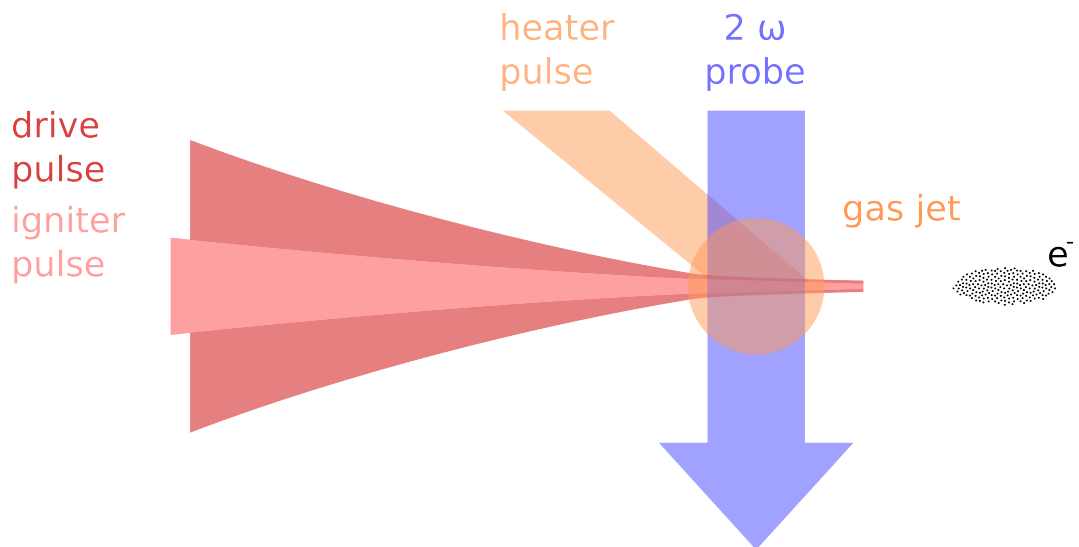


Abbildung 2.1: Schematische Anordnung der Komponenten eines typischen Experiments (nach [26]). Enthalten sind der Gasjet, der igniter pulse, der daraus das Plasma erzeugt, der heater pulse der das Plasma aufheizt und für das Dichteprofil sorgt, der drive pulse, der die Elektronen beschleunigt und der probe laser, der die Propagation des Lasers im Plasma beobachtet

Änderungen an der Energie des heizenden Pulses und der Expansionszeit lässt sich das Dichteprofil an den Hauptpuls anpassen um optimale Strahlführung zu erreichen.

Der Hauptpuls, im Originalpaper als „drive pulse“ bezeichnet, ist ein Puls mit 55 Femtosekunden Dauer und 500 Millijoule Energie. Der Puls wird auf eine Eintrittsfläche mit einem Durchmesser von 8,5 Mikrometer an der Vorderseite des Plasmakanals fokussiert, dies bedeutet eine Intensität von $1,1 \cdot 10^{19} \text{ W/cm}^2$.

Die Propagation des Hauptpulses kann dabei mit einem seitlich eingekoppelten Laser doppelter Wellenlänge interferometrisch verfolgt werden. Zusätzlich kann der Laserstrahl nach dem Austritt aus dem Plasma auf ein Mode-Imager CCD abgebildet werden.

Die Elektronen, die aus dem Plasma herausbeschleunigt werden, können mit einem ICT (Integrating Current Transformer) oder einem Magnetspektrometer mit Phosphorschirm ausgewertet werden.

2.2 Erzeugung ultrakurzer Laserpulse

Der vorhergehende Abschnitt hat sich mit dem experimentellen Aufbau beschäftigt. Jetzt soll noch kurz auf die Erzeugung der benötigten energiereichen, ultrakurzen Laserpulse

eingegangen werden. Um einen Laserpuls zu erzeugen, der nur wenige Femtosekunden lang ist, muss ein erheblicher Aufwand getrieben werden, insbesondere wenn eine hohe Pulsenergie benötigt wird. Meist erzeugt man einen kurzen Puls mit einem Laser im Mode-Locking Betrieb und verstärkt diesen dann auf die benötigte Intensität.

Ein Laser der nur mit einer scharf definierten (Frequenz-)Mode schwingt, erzeugt einen (zeitlich) unendlich weit ausgedehnten Strahl. Umgekehrt muss ein Laser, der zeitlich sehr scharf ist, auf extrem vielen Frequenzen schwingen. Genauer gesagt gilt zwischen Pulsdauer τ und der spektralen Bandbreite $\Delta\nu$ folgender Zusammenhang:

$$\tau \cdot \Delta\nu \geq c_B \quad (2.1)$$

Dabei ist c_B eine Zahl nahe an eins, die von der genauen Pulsform abhängt. Pulse, bei denen die Ungleichung exakt erfüllt ist, bezeichnet man als Bandbreiten-limitiert. Eine kurze Abschätzung liefert für einen Puls mit $\tau \approx 100$ fs eine Bandbreite von mindestens $\Delta\nu = 10000$ GHz. Solche Bandbreiten sind bei Ti:Saphir-Lasern oder Farbstoff-Lasern durchaus realisierbar.

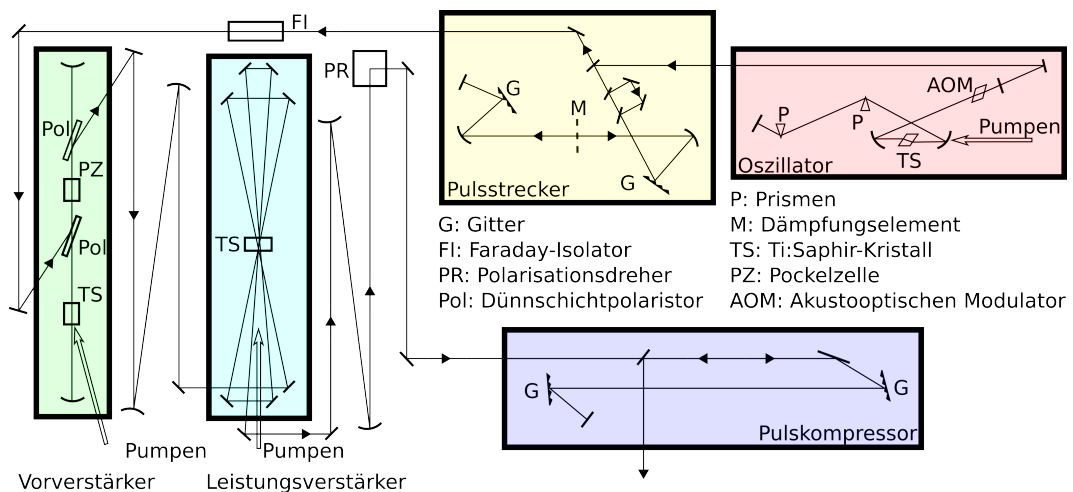


Abbildung 2.2: Schema eines Terawatt Femtosekunden Lasers nach [4]. Der Master-Oszillator erzeugt einen kurzen Puls geringer Leistung, der vom Pulsstreckerelement möglichst verzerrungsfrei zeitlich gestreckt wird. Dieser Puls wird in zwei Schritten um einen Faktor $4,7 \cdot 10^5$ verstärkt. Der Pulskompressor verkürzt den Puls wieder auf die ursprüngliche zeitliche Länge.

Um einen kurzen Puls zu erhalten müssen nicht nur viele Moden schwingen, sondern sie müssen auch mit einer festen Phasenbeziehung zueinander oszillieren. Andernfalls erhält man viele inkohärente Lichtpulse. Die feste Phasenbeziehung im Laser lässt sich

durch Mode-Locking realisieren. Die verschiedenen Arten aktiven und passiven Mode-Lockings sprengen den Rahmen dieser Arbeit deutlich. Daher muss der Hinweis genügen, daß der exemplarische Aufbau in Abbildung 2.2 einen akustooptischen Modulator für das Mode-Locking verwendet. In diesem wird das Laserlicht durch Streuung an einer Schallwelle in der Frequenz verschoben und so die verschiedenen Moden miteinander gekoppelt.

Der so erzeugte Puls hat eine Dauer von 20 fs und eine Energie von etwa 5 nJ. Um zur gewünschten Leistung im Terawatt-Bereich zu kommen, muss der Puls also noch in hohem Maße verstärkt werden. Da jedoch die Leistungsabgabe eines Verstärkers begrenzt ist, verwendet man die Methode der „Chirped pulse amplification“. Hier wird der Puls zeitlich gedehnt (beim beispielhaft gezeigten Aufbau um einen Faktor 15000), verstärkt und dann wieder komprimiert. Auf diese Art werden die Anforderungen an den Verstärker deutlich niedriger und realisierbarer.

Zum Strecken verwendet man einen Aufbau mit einer (möglichst linearen) Dispersion. Dadurch erreichen niedrige Frequenzen den Ausgang etwas eher als höhere Frequenzen (up chirp). Dies zieht den Puls zeitlich auseinander. Um den Puls nach dem Verstärken wieder komprimieren zu können, ist es nötig nichtlineare Einflüsse auf die Dispersion so gut wie möglich zu kompensieren. Im gezeigten Aufbau werden Fehler zweiter, dritter und vierter Ordnung kompensiert.

Nach dem Strecken durchläuft der Puls 14 mal einen regenerativen Vorverstärker, der den Puls auf 9 mJ verstärkt. Der Verstärker wird selbst von einem einige Hundert Picosekunden langen Puls mit 50 mJ Energie gepumpt. Die Pockels-Zelle und die Polarisatoren werden dabei als schaltbare Ein- und Auskoppelspiegel verwendet, um den Puls genau die gewünschte Anzahl an Durchläufen im Verstärkermedium absolvieren zu lassen. So lässt sich eine deutlich höhere Verstärkung als bei einem einzigen Durchlauf erzielen, ohne daß der Verstärker Sättigung erreicht und den Puls verzerrt.

Vor dem zweiten Verstärker wird der Strahl aufgeweitet, um die Leistungsdichte im Verstärkermaterial klein zu halten und Schäden am Kristall zu vermeiden. Vier Durchläufe durch den Ti:Saphir Kristall, der mit 850 mJ gepumpt wird, verstärken den Puls auf eine Energie von 235 mJ.

Der Strahl wird nochmals aufgeweitet und anschließend vom Pulskompressor wieder zeitlich gestaucht. Dabei geht etwas Energie verloren, so daß der Puls am Ende in 30 fs eine Energie von 125 mJ konzentriert, eine Leistung von über 4 TW. Die Pulslänge ist dabei von der Bandbreite der Verstärker begrenzt. Das gezeigte Lasersystem wäre in der Lage, solche Pulse mit einer Wiederholrate von 10 Hertz in ein Plasma zu schicken, um

dort eine Plasmawelle zu erzeugen.

Während die Energie eines solchen Pulses relativ einfach zu messen ist, lässt sich die Pulsdauer nur schwer bestimmen. In diesem Abschnitt und im Rest der Arbeit wird hierzu die volle Breite bei der Hälfte der maximalen Intensität (FWHM) verwendet. Abbildung 2.3 illustriert diese Definition. Im Experiment wird die FWHM meist anhand der Autokorrelation des Pulses unter der Annahme einer Gaußschen Pulsform bestimmt.

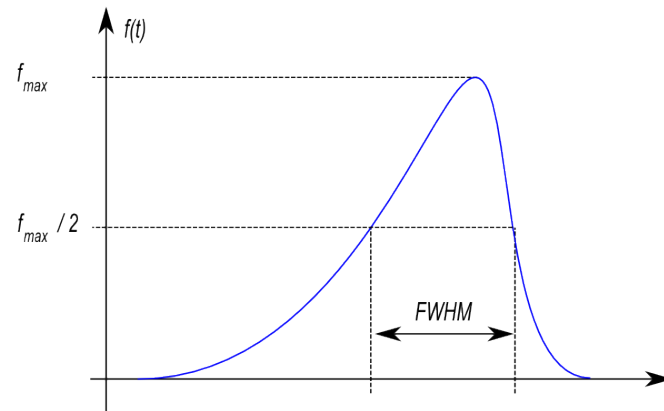


Abbildung 2.3: Definition der „full width at half maximum“ (FWHM)

3 Numerik

Nachdem im vorangegangenen Kapitel die experimentelle Realisierung von LWFA dargestellt wurde, stellt sich die Frage, warum man kinetische Simulationen anstelle von Experimenten durchführt. Diese Frage ist durchaus berechtigt, und es ist sicherlich nötig, die Ergebnisse aus Simulationen mit der Realität zu vergleichen. Paper wie [55] zeigen jedoch, daß eine gute quantitative Übereinstimmung besteht.

Eines der Ziele dieser Arbeit ist es genau diese Übereinstimmung zu testen, da der verwendete PIC-Code auch benutzt wird um astrophysikalische Plasmen zu simulieren, deren Verhalten sich kaum im Labor testen lässt. Stimmen die Simulationsergebnisse für die LWFA jedoch mit dem Experiment überein, so kann man sich sicher sein, daß auch die Ergebnisse der astrophysikalischen Simulationen korrekt sind.

Ein weiterer Grund für die numerische Untersuchung von Beschleunigungsprozessen ist die Möglichkeit, Effekte bei Laserstärken zu testen, die experimentell noch nicht oder nur mit sehr großem Aufwand realisierbar sind. Mit Hilfe der Simulationsergebnisse kann man hier neue Experimente besser planen und dimensionieren.

Als weiteren Vorteil bietet die Simulation einige Möglichkeiten, die ein Experiment nicht bieten kann. So lässt sich mit einer Simulation recht einfach die Frage beantworten, wo sich die Elektronen, die das Plasma mit hoher Geschwindigkeit verlassen, vor dem Eintreffen des Laserpulses befunden haben. Eine solche Frage lässt sich mit einem Experiment nur sehr schwer klären, da alle Elektronen ununterscheidbar sind. Bei einer Simulation hingegen kann man ohne Problem den Elektronen eine Identifikationsnummer zuordnen und so diese Frage beantworten. Diese Möglichkeiten für Beobachtungen und Auswertungen, die im Experiment nicht zugänglich sind, können zum Verständnis der mikroskopischen Phänomene im Plasma beitragen und so mehr als nur eine Nachbildung des Experiments im Computer bieten.

3.1 Wahl der numerischen Methode

Es gibt einige unterschiedliche Arten, Plasmen numerisch zu untersuchen, daher soll hier kurz erörtert werden, welche Gründe für und gegen die möglichen Methoden sprechen.

Die einfachste Methode ein Plasma zu beschreiben ist es, elektrische und magnetische Felder fest vorzugeben und dann die Bewegung einzelner Testteilchen in diesem Feld zu untersuchen. Dies funktioniert sehr gut, wenn die Kräfte aus den äußeren Feldern viel stärker sind als die Kräfte, die von den Ladungsfluktuationen im Plasma erzeugt werden. Dies ist bei LWFA jedoch nicht gegeben. Insbesondere im Blowout-Regime, wenn eine ganze Region im Plasma keine Elektronen mehr enthält, wird die Kraft zwischen den verbliebenen Protonen und den vom Laser getriebenen Elektronen sehr groß. Außerdem kann mit dieser Methode natürlich nicht die Rückwirkung des Plasmas auf den Laserpuls untersucht werden.

Eine andere Möglichkeit ein Plasma numerisch zu untersuchen, ist die Simulation der Verteilungsfunktion $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ gemäß der Boltzmann- oder Vlasov-Gleichung. Dazu muss man allerdings die Phasenraumdicke quantisieren. Da in jede Raumrichtung etliche Hundert Stützpunkte benötigt würden und Energien zwischen einigen zehn Elektronenvolt und einigen Milliarden Elektronenvolt im System vorkommen, würde man etliche Terabyte an Arbeitsspeicher benötigen, was die Kapazität der verfügbaren Rechner sprengt.

Mit einer Beschreibung des Plasma als Fluid kann man hier deutlich Speicherbedarf und Rechenkraft sparen. Dabei wird die genaue Abhängigkeit der Verteilungsfunktion von der Geschwindigkeit vernachlässigt und eine gegebene Geschwindigkeitsverteilung der Teilchen angenommen. Diese Vorgehensweise ist insbesondere für die magnetohydrodynamische Beschreibung von Fusionsplasmen beliebt, funktioniert zur Beschreibung von LWFA aber nicht, da die Geschwindigkeitsverteilung der Teilchen durch den Laser stark verändert wird und Teil der Untersuchung ist.

Angesichts dieser Probleme bleibt also nichts anderes übrig als einzelne Teilchen zu simulieren. Dabei muss man in einzelnen Zeitschritten die Bewegung und Geschwindigkeitsänderung der Teilchen berechnen. Dazu benötigt man sämtliche Kräfte, die auf die Teilchen wirken, und die Erzeugung der Kräfte durch die Teilchen. Will man die Kräfte zwischen den Teilchen direkt berechnen, so geht dies nur bis zu mittleren Teilchenanzahlen, da der Aufwand wie $\mathcal{O}(n^2)$ skaliert. Damit bedeutet eine Verdoppelung der Teilchenzahl also eine Vervierfachung des Aufwands.

Hier kommt eine spezielle Eigenschaft der relevanten Plasmen zur Rettung. Die Kräfte

auf den Teilchen sind nicht durch kurzreichweitige Stöße dominiert, sondern durch die elektrischen und magnetischen Felder. Es genügt also für jedes Teilchen die Beiträge zu diesen Feldern zu berechnen (was einen konstanten Aufwand pro Teilchen bedeutet) und die Kraftwirkung der Felder auf die Teilchen zu berechnen (wieder nur linearer Aufwand in der Teilchenanzahl). Diese Methode wird als PIC (particle in cell) oder PM (particle mesh) bezeichnet und gibt bei geeigneter Größe des Gitters, auf dem die elektrischen und magnetischen Felder berechnet werden, und ausreichend vielen Teilchen pro Zelle die Physik korrekt wieder.

Sollten Kollisionen zwischen Teilchen doch einen relevanten Einfluss haben, so kann man zusätzlich für Kopplung über die elektromagnetischen Felder auch noch die Kraftwirkung der nahe gelegenen Teilchen berechnen. Solche Codes werden als PP-PM (particle particle - particle mesh) bezeichnet.

3.2 PIC Code

Der Name „Particle in Cell“ erklärt schon den Grundgedanken dieser Methode. Man modelliert Teilchen als einzelne Objekte mit (im Rahmen der Fließkommagenauigkeit) kontinuierlichen Werten für die Position und Geschwindigkeit. Ein geeignetes Gitter bietet diskrete Stellen, an denen die elektrischen und magnetischen Felder sowie die Komponenten des Stroms gespeichert werden.

Die folgenden Abschnitte legen dar, wie ein solcher Code grundlegend aufgebaut ist, warum man diese Beschreibung des Plasmas wählt und welche Bedingungen man einhalten muss um die Physik korrekt wiederzugeben. Da die gewählte Beschreibung des Plasmas rechenintensiv ist, wird im letzten Abschnitt noch kurz darauf eingegangen, welche Techniken es gibt, die benötigte Rechenleistung bereitzustellen.

3.2.1 Grundlegender Aufbau

Abbildung 3.1 zeigt den grundlegenden Aufbau des verwendeten PIC Codes. Die blau dargestellte Schleife wird für jeden Zeitschritt wieder durchlaufen, für die gesamte Simulation viele tausend Male. Je nach Wahl der Simulationparameter wird zusätzlich die Laserinjektion und der Output durchgeführt.

Der erste Schritt ist es, aus den Feldern auf den Gitterpunkten und der Position des Teilchens die lokalen elektrischen und magnetischen Felder, die auf das Teilchen wirken, zu bestimmen. Da die Teilchen in der Simulation nicht punktförmig sind, sondern durch

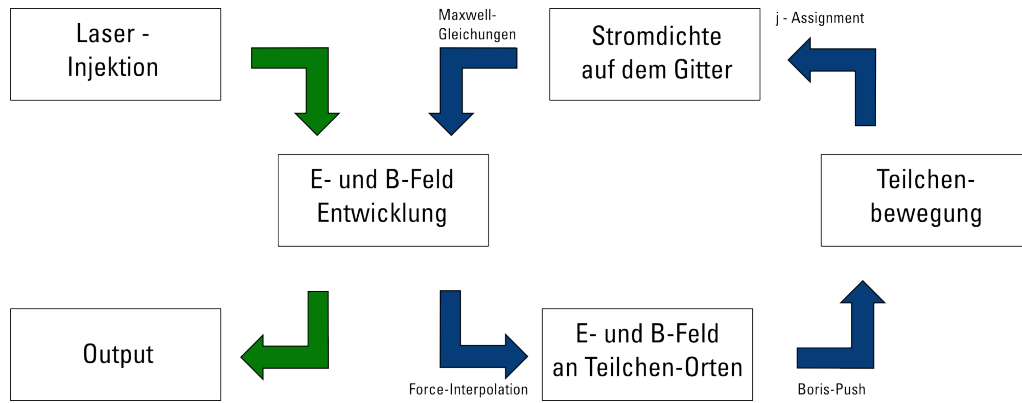


Abbildung 3.1: Grundlegender Aufbau eines PIC-Codes aus den Zeitschritten für Feld und Teilchen und den Interpolationschritten für die lokalen Felder und Ströme, ergänzt durch die Laserinjektion

wolkenartige Metateilchen, die bis zu einige Millionen Elementarteilchen zusammenfassen, wiedergegeben werden, ist es hier nötig den Formfaktor, der die Form der Wolke beschreibt, zum Interpolieren zu verwenden. Genauer zur Auswahl an Formfaktoren findet sich in Abschnitt 3.2.2.

Als nächstes wird aus den lokalen Feldern die Kraft auf das Teilchen und die neue Geschwindigkeit $\vec{v}_{t+\frac{1}{2}}$ sowie der neue Ort \vec{x}_{t+1} bestimmt. Dazu wird der sogenannte Boris-Push verwendet, der in Abschnitt 3.2.3 näher erläutert wird.

Die Bewegung der elektrisch geladenen Teilchen bedeutet einen Strom, der auf die magnetischen Felder zurück wirken muss, um eine selbstkonsistente Simulation zu erhalten. Daher wird nach dem Teilchen-Update für jedes Teilchen der Strom berechnet und mittels der Methode von Esirkepov (siehe [21]) auf das Gitter verteilt. Diese Methode wird in Abschnitt 3.2.4 näher erklärt. Auch hier spielt wieder der Formfaktor, der schon im ersten Schritt erwähnt wurde, eine Rolle; genauer gesagt muss man in beiden Routinen den gleichen Formfaktor verwenden.

Als letzter Schritt in der Schleife werden über die Maxwell-Gleichungen aus den elektrischen Felder \vec{E}_t und den magnetischen Felder \vec{B}_t zusammen mit den Strömen $\vec{j}_{t+\frac{1}{2}}$, die im vorhergehenden Schritt berechnet wurden, die neuen Felder \vec{E}_{t+1} und \vec{B}_{t+1} berechnet. Diese werden dann noch von den Randbedingungen, die in Abschnitt 3.4.2 behandelt werden, und der Injektion des Lasers modifiziert, bevor die Schleife von vorne beginnt.

Wenn die erforderliche Anzahl an Zeitschritten bis zum nächsten Output erreicht ist, so werden an dieser Stelle in der Schleife auch die Felder, Ströme und Dichten gespeichert. Analog wird an dieser Stelle die Notwendigkeit eines Teilchen-Outputs geprüft.

3.2.2 Formfaktor

Die Position eines Teilchens ist (im Rahmen der Fließkommagenauigkeit) beliebig, die elektrischen und magnetischen Felder und auch die Ströme sind jedoch in Schritten von Δx diskretisiert. Um nun sinnvoll von Teilchengrößen, wie Ladung und Strom, zu den diskretisierten Größen auf dem Gitter zu kommen, ist es nötig die Teilchengrößen aufzuteilen. Dies geschieht mit Hilfe des Formfaktors.

Der Code verwendet durchgängig das weiter unten erläuterte TSC-Schema als Formfaktor, es gibt prinzipiell aber auch andere Möglichkeiten, die ihre eigenen Vor- und Nachteile mit sich bringen.

Alle Formfaktoren müssen jedoch gewisse Voraussetzungen erfüllen um physikalisch sinnvolle Ergebnisse zu liefern. Es ist offensichtlich wichtig und durch Normieren leicht zu erreichen, daß die verteilte Ladung sich korrekt zur Gesamtladung addiert. Dafür muss gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(x) dx \stackrel{!}{=} 1$$

Weiterhin sollte die Funktion symmetrisch sein, um keine unnatürlichen Vorzugsrichtungen zu erzeugen:

$$S(-x) \stackrel{!}{=} S(x)$$

Des weiteren sollte die Funktion mit zunehmendem x monoton fallen um die Ladung des Teilchens nahe beim Schwerpunkt zu konzentrieren und unphysikalische Löcher in der Ladungswolke zu vermeiden.

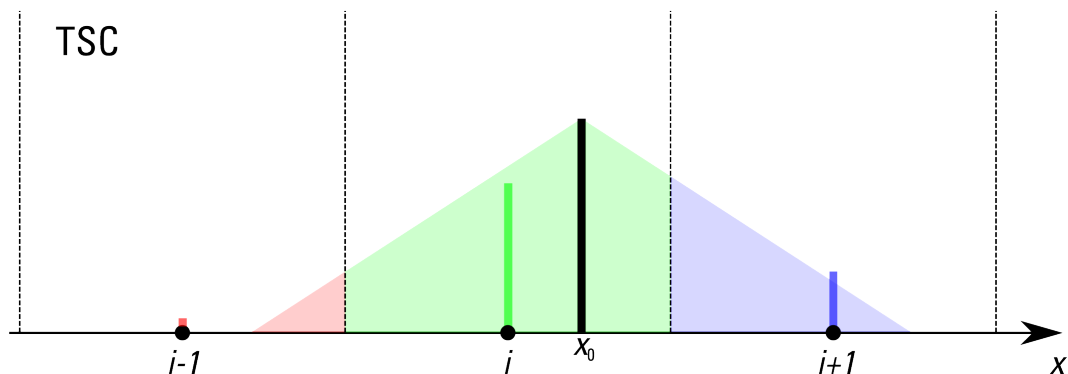


Abbildung 3.2: Aufteilung der Teilchenladung (schwarz) über den Formfaktor in Form einer triangular shaped cloud (halb transparent) in die Anteile in den einzelnen Zellen (farbige Balken)

In Abbildung 3.2 ist für einen Formfaktor in Form einer einer triangular shaped cloud

gezeigt, wie die Ladung eines Teilchens ausgehend vom Schwerpunkt des Teilchens x_0 mit Hilfe der „shape function“ auf die einzelnen Zellen aufgeteilt wird. Für jede Zelle i wird dann die Ladungsmenge, die im Bereich $x_{i-\frac{1}{2}}$ bis $x_{i+\frac{1}{2}}$ liegt, aufaddiert und dem Gitterpunkt x_i zugewiesen. Um Rechenzeit zu sparen, wird im Code nicht jedes Mal wieder S erzeugt, zerlegt und integriert. Statt dessen verwendet man die „assignment function“:

$$W(x) = \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} S(u) du \quad (3.1)$$

Diese Funktion muss für den gewählten Formfaktor schnell und ohne große Fehler zu berechnen sein. In der Praxis werden daher vor allem die folgenden drei Funktionen verwendet, deren shape function $S(x)$ und assignment function $W(x)$ in Abbildung 3.3 dargestellt sind:

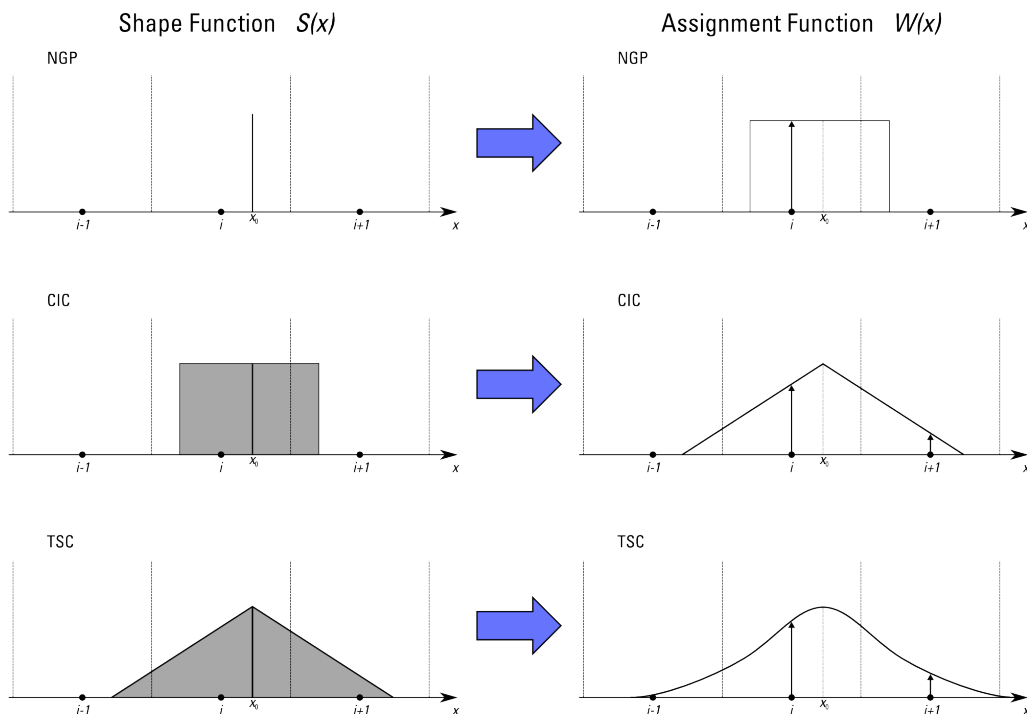


Abbildung 3.3: Übersicht über die gängigen Formfaktoren aus [25]. Links ist jeweils die shape function $S(x)$ gezeigt, rechts die zugehörige assignment function $W(x)$. Von oben nach unten sind „nearest grid point“ (NGP), „cloud in cell“ (CIC) und „triangular shaped cloud“ (TSC) dargestellt.

Als einfachstes Schema kommt NGP (nearest grid point) in Frage. Hier wird einfach die gesamte Ladung dem nächstgelegenen Gitterpunkt zugerechnet. Der Formfaktor ist also eine Delta-Funktion, die Zuweisungsfunktion hat die Form eines Top Hats. Dieses

Verfahren erfüllt offensichtlich die obigen Anforderung und ist sehr schnell. Allerdings „springt“ der Beitrag eines Teilchen, das eine Zellengrenze überquert, sehr plötzlich (innerhalb eines Zeitschritts) von der einen zur anderen Zelle. Dadurch benötigt man recht viele Teilchen pro Zelle um hinreichend glatte Ladungsverteilungen zu erhalten und zu verhindern, daß das elektrische Feld durch numerische Fehler anschwingt. Dadurch wird ein Großteil der Geschwindigkeit wieder zunichte gemacht.

Die nächst kompliziertere aber auch bessere Möglichkeit ist es, eine Top Hat Funktion der Breite Δx zu verwenden, also quasi W_{NGP} als S_{CIC} zu nutzen. Dieses Schema nennt sich „Cloud in Cell“ und beseitigt das Problem, daß die Ladung eines Teilchens plötzlich springt. Die Zuweisungsfunktion ist hier dreieckig.

Zur nächst höheren Ordnung kann man gelangen, indem man die dreieckige Zuweisungsfunktion von CIC als Formfaktor verwendet. Diese lautet:

$$S(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit erreicht man TSC, was für die Erklärungen weiter oben verwendet wurde. Dieses Schema hat den großen Vorteil, daß die Ladung sehr „glatt“ verteilt wird. Dadurch kommt man mit recht wenigen Teilchen pro Zelle aus, ohne viel numerisches Rauschen zu haben.

Die Zuweisungsfunktion für TSC lautet:

$$W(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} - x^2 & \text{für } |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(\frac{3}{2} - |x|)^2 & \text{für } \frac{1}{2} \leq |x| < \frac{3}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Hier sieht man auch den Nachteil dieses Schemas. Die Funktion $W(x)$ wird relativ kompliziert, sowohl durch die zwei Bedingungen ($x < \frac{1}{2}$ und $x < \frac{3}{2}$), als auch durch die Berechnungen in beiden Zweigen und verbraucht entsprechend viel Rechenzeit.

Prinzipiell könnte man das bisherige Vorgehen weiter verfolgen und als nächste Ordnung eine „quadratic shaped cloud“ verwenden. Dies würde den numerischen Fehler noch etwas weiter reduzieren, allerdings bei deutlich höherem Rechenaufwand. $W(x)$ wäre hier stückweise aus vier Bereichen zusammengesetzt, die alle einigen arithmetischen Aufwand enthalten. Auf der anderen Seite kann man die Zahl der Teilchen pro Zelle kaum mehr gegenüber TSC reduzieren, da man eine Mindestmenge an Teilchen braucht, um den Phasenraum ausreichend abzudecken und die numerischen Fehler klein zu halten.

Im Prinzip wäre es auch möglich eine Gaußsche Glockenkurve als Formfaktor unendlich hoher Ordnung zu verwenden, aber auch hier ist der Rechenaufwand das Ergebnis nicht wert, denn eine Gauß-Funktion ist unendlich weit ausgedehnt, was bedeutet, daß ein Teilchen Beiträge in allen Zellen erzeugt. Selbst wenn man die Gauß-Funktion abschneidet, sobald sie auf die Größenordnung der Fließkommagenauigkeit abgefallen ist, ist der Rechenaufwand gigantisch. Da auch alle Ableitungen in unserem PIC-Code (siehe Abschnitt 3.2.6) in zweiter Ordnung genähert sind, verwendet der Code TSC als Formfaktor, welches ebenfalls ein Schema zweiter Ordnung ist.

Die bisherigen Betrachtungen haben sich alle auf den eindimensionalen Fall beschränkt. Im Code werden natürlich alle drei Dimension verwendet. Dabei wird der dreidimensionale Formfaktor $S(\vec{x})$ in ein Produkt von drei einzelnen, aber gleichen Formfaktoren zerlegt.

$$S(\vec{x}) = S(x, y, z) = S(x) \cdot S(y) \cdot S(z)$$

Die „assignment function“ $W(\vec{x})$ wird analog zerlegt.

3.2.3 Boris-Push

Der eben definierte Formfaktor wird an zwei Stellen im Code verwendet. Es ist wichtig an beiden Stellen den gleichen Formfaktor zu verwenden, um eine selbstkonsistente Beschreibung zu erhalten. Der erste Anwendungsbereich ist die Berechnung der elektrischen und magnetischen Felder am Ort eines Teilchens aus den Werten der Felder auf den umgebenden Gitterstützpunkten.

Die Felder am Ort des Teilchens werden dann verwendet, um die Lorentz-Kraft \vec{F}_L auf das Teilchen zu bestimmen. In den verwendeten cgs Einheiten lautet die Formel hierfür:

$$\vec{F}_L = q \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \quad (3.2)$$

Überlegt man sich nun

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{\vec{v}^{t+\frac{1}{2}} - \vec{v}^{t-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \quad (3.3)$$

$$\Rightarrow \vec{v}^{t+\frac{1}{2}} = \vec{v}^{t-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{m} \cdot \vec{F} \quad (3.4)$$

so ist klar, wie man in erster Ordnung die Änderung der Geschwindigkeit berechnen kann. Man bestimmt die lokalen Felder per Interpolation, berechnet die neue Geschwindigkeit und bewegt dann das Teilchen.

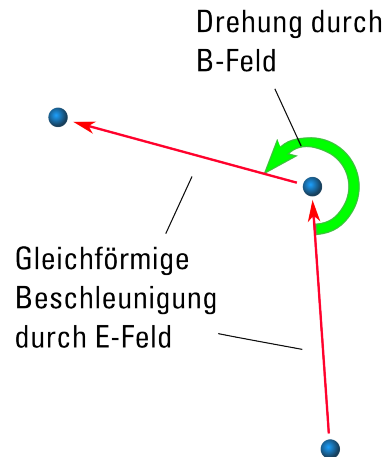


Abbildung 3.4: Der Boris-Push teilt die Kraftwirkung der Lorentz-Kraft in einen halben Beschleunigungsschritt durch das elektrische Feld, eine Drehung durch das magnetische Feld und einen zweiten halben Beschleunigungsschritt auf.

Man kann jedoch mit relativ wenig Mehraufwand eine deutlich bessere Genauigkeit erhalten. Dazu spaltet man wie in Abbildung 3.4 gezeichnet die Wirkung des elektrischen Feldes auf und führt zwischen den beiden Teilschritten die Drehung, die vom magnetischen Feld erzeugt wird, aus. In Formeln wird dies beschrieben durch:

$$\vec{v}^{t-\Delta t/2} = \vec{v}^- - \frac{q \vec{E} \Delta t}{2 m} \quad (3.5)$$

$$\frac{\vec{v}^+ - \vec{v}^-}{\Delta t} = \frac{q}{2 m} (\vec{v}^+ + \vec{v}^-) \times \vec{B} \quad (3.6)$$

$$\vec{v}^{t+\Delta t/2} = \vec{v}^+ + \frac{q \vec{E} \Delta t}{2 m} \quad (3.7)$$

Dieses Verfahren wurde 1971 von J. Boris entwickelt und trägt daher den Namen „Boris Push“. Der große Vorteil gegenüber dem naiven Vorgehen ist die wesentlich höhere Genauigkeit und Energieerhaltung ohne wesentlich mehr Rechenzeit zu benötigen und ohne mehrfach die Felder am Ort des Teilchens bestimmen zu müssen. Wie weiter unten beim Berechnen der elektrischen und magnetischen Felder in Abschnitt 3.2.6 kann man hier sehr einfach die Genauigkeit auf $\mathcal{O}(h^2)$ verbessern, indem man einen Schritt halbiert. Außerdem ist das Verfahren, genau wie die Differentialgleichungen, die es nähert, invariant unter Zeitumkehr.

Der Code verwendet die etwas aufwändigere, relativistisch korrekte Variante, die mit

$u = \gamma v$ rechnet und folgende Beschreibung der Lorentz-Kraft löst:

$$\frac{u^{n+1/2} - u^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{q}{m} \left(E^n + \frac{1}{c} \frac{u^{n+1/2} + u^{n-1/2}}{2 \gamma^n} \times B^n \right) \quad (3.8)$$

Die einzelnen Schritte, mit denen die Geschwindigkeit dann berechnet wird, lauten relativistisch korrekt:

$$\vec{u}^- = \vec{u}^{n-1/2} + \frac{q \vec{E}^n}{2 m} \Delta t \quad (3.9)$$

$$\frac{\vec{u}^+ - \vec{u}^-}{\Delta t} = \frac{q}{m} \frac{1}{2 c \gamma^n} \frac{\vec{u}^+ + \vec{u}^-}{2} \times \vec{B}^n \quad (3.10)$$

$$\vec{u}^{n+1/2} = \vec{u}^+ + \frac{q \vec{E}^n}{2 m} \Delta t \quad (3.11)$$

Die Gleichung 3.10 nach \vec{u}^+ aufzulösen, ist, genauso wie bei Gleichung 3.6, etwas aufwändiger, da die Unbekannte sowohl auf der linken Seite vorkommt, als auch auf der rechten Seite in einem Kreuzprodukt steht. Birdsall und Langdon geben in [6] folgende Möglichkeit an, die auch im Code verwendet wird:

$$\vec{t} = \frac{q \vec{B}}{2 \gamma^n m c} \Delta t \quad (3.12)$$

$$\vec{u}' = \vec{u}^- + \vec{u}^- \times \vec{t} \quad (3.13)$$

$$\vec{s} = \frac{2 \vec{t}}{1 + \vec{t} \cdot \vec{t}} \quad (3.14)$$

$$\vec{u}_+ = \vec{u}' + \vec{u}' \times \vec{s} \quad (3.15)$$

Wenn damit und mit Formel 3.9 und 3.11 die neue Geschwindigkeit des Teilchens $\vec{u}^{n+1/2}$ berechnet ist, wird noch der Ort des Teilchens neu berechnet. Dazu verwendet man:

$$\vec{x}^{n+1} = \vec{x}^n + \frac{\vec{u}^{n+1/2}}{\gamma^{n+1/2}} \Delta t \quad (3.16)$$

3.2.4 Stromzuweisung

Bei der Erklärung des Formfaktors in Abschnitt 3.2.2 war mehrfach die Rede davon, die Ladung des Teilchens auf die Gitterpunkte aufzuteilen. Im Diagramm 3.1 ist jedoch die „Stromdichte auf Gitter“ dargestellt. Wie passt das zusammen?

Diese Frage lässt sich beantworten, wenn man bedenkt, daß die vier Maxwell-Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung das Verhalten der elektrischen und magnetischen

Felder überbestimmen. Man hat also eine gewisse Freiheit darin, welche Gleichungen man verwendet, um den Zustand im nächsten Zeitschritt zu beschreiben.

Da man die Änderungen der elektrischen und magnetischen Felder bestimmen will, bietet es sich an, die Gleichungen 1.1 und 1.2 zu verwenden. Den benötigten Strom \vec{j} bestimmt man aus der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (3.17)$$

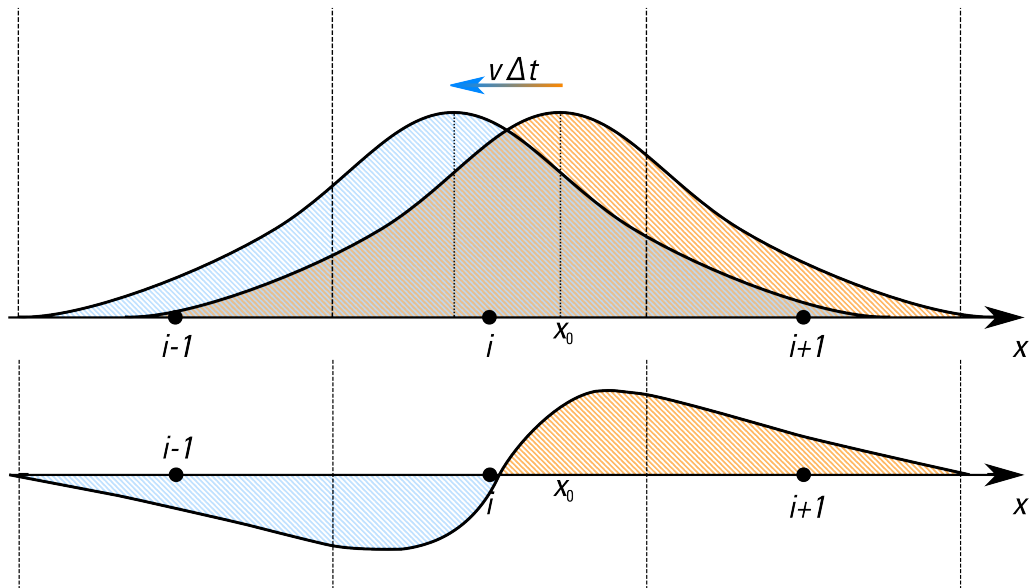


Abbildung 3.5: Bewegung des Teilchens führt zu Änderungen in der Ladungsdichte ρ (im oberen Bild gezeigt) und damit zu Beiträgen in der Divergenz des Stroms (im unteren Bild gezeigt).

Abbildung 3.5 zeigt den eindimensionalen Fall. Ein positiv geladenes Teilchen bewegt sich in einem Zeitschritt der Länge Δt von seinem Ausgangsort x_0 zu seiner neuen Position. An den blau gezeichneten Stellen ist jetzt mehr Ladung als zuvor, an den orange gezeichneten Stellen weniger. Dies erzeugt gemäß der Kontinuitätsgleichung den darunter skizzierten Verlauf von $\nabla \cdot \vec{j}$.

Weit entfernt vom Teilchen ist der Strom Null, so daß man von dort ausgehend über $\nabla \cdot \vec{j}$ integrieren kann um den Verlauf des Stroms zu erhalten. In drei Dimensionen ist die Integration etwas komplizierter, da j_x entlang der x -Achse integriert werden muss, j_y aber entlang der y -Achse. Auch die Aufteilung des Gesamtstroms in j_x , j_y und j_z ist bei schrägen Bewegungen eines Teilchen, die nicht entlang einer Koordinatenachse

verlaufen, komplizierter.

Sehr gut hat sich hier das Verfahren von Esirkepov [21] bewährt, das recht schnell ist, auch wenn die Aufteilung des Stroms etwas unanschaulich ist. Der Code zerlegt geschickt die dreidimensionale Verschiebung in drei eindimensionale Verschiebungen (siehe Formel 3.18) und berechnet die Strombeiträge daraus.

$$\begin{aligned}
 S(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - S(x, y, z) &= S(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - S(x+\Delta x, y+\Delta y, z) \\
 &\quad + S(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - S(x+\Delta x, y, z) \\
 &\quad + S(x+\Delta x, y, z) - S(x, y, z)
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Das Verfahren von Bunemann ist etwas anschaulicher, funktioniert jedoch nicht mit dem TSC-Formfaktor zusammen. Prinzipiell ist es auch möglich die Poisson-Gleichung in Formel 1.4 zu lösen und dann aus Formel 1.2 die Änderungen im magnetischen Feld zu bestimmen. In diesem Fall braucht man die Kontinuitätsgleichung nicht zu verwenden und kann komplett auf die Berechnung des Stroms verzichten. Die Poisson-Gleichung ist jedoch eine globale Gleichung (und die elektrischen Felder der einzelnen Teilchen viel ausgedehnter als ihre Strombeiträge), so daß es viel aufwändiger und langsamer ist diese zu lösen.

3.2.5 Yee-Gitter

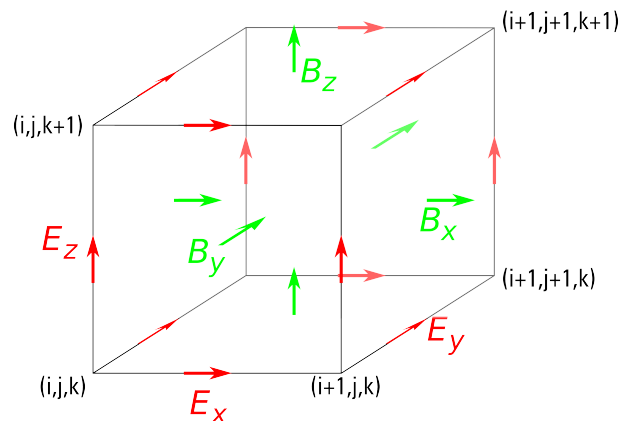


Abbildung 3.6: Elementarzelle des Yee-Gitters mit gestaffelt gespeicherten Komponenten von elektrischem und magnetischem Feld

Wenn man sich die Maxwell-Gleichungen in Abschnitt 3.2.6 anschaut, stellt man fest,

daß mehrfach die Rotation eines Vektorfeldes benötigt wird. Betrachtet man etwa 1.2 und formt diese wie unten beschreiben um, so erhält man Formel 3.22. Die Zeitableitung lässt sich als $\Delta \vec{E} / \Delta t$ diskretisieren. Betrachtet man nun die x Komponente und multipliziert Δt auf die andere Seite, so erhält man:

$$E_x = c\Delta t \cdot \left(\nabla \times \vec{B} \right)_x - 4\pi \cdot \Delta t \cdot j_x \quad (3.19)$$

$$= c\Delta t \cdot \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) - 4\pi \cdot \Delta t \cdot j_x \quad (3.20)$$

Wenn man jetzt Abbildung 3.6 betrachtet versteht man die spezielle Anordnung der elektrischen und magnetischen Felder. Die Komponenten B_y und B_z sind genau so angeordnet, daß sie eine Schleife um E_x bilden, so daß man leicht die Rotation des magnetischen Feldes an der Stelle des elektrischen Feldes ermitteln kann.

$$\left(\nabla \times \vec{B} \right)_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{B_z(i, j, k) - B_z(i, j - 1, k)}{\Delta x} + \frac{B_y(i, j, k) - B_y(i, j, k - 1)}{\Delta x} \quad (3.21)$$

Das Yee-Gitter ist genau so konstruiert, daß bei allen Feldern die zugehörigen komplementären Felder ringsum angeordnet sind, wodurch man leicht die benötigte Rotation berechnen kann. Die diskretisierte Form kann direkt und ohne weitere Interpolation in die Formel, in der die Rotation benötigt wird, eingesetzt werden. Dadurch ist kein weiterer Interpolationsschritt nötig und die numerischen Fehler werden minimiert, was hilft das Auftreten von Divergenzen im Magnetfeld zu verhindern und die Stabilität über viele Zeitschritte zu erhöhen. Als angenehmer Nebeneffekt wird der Rechenaufwand einer Interpolation eingespart.

Hier nicht eingezeichnet sind die Ströme, deren Komponenten zusammen mit dem elektrischen Feld gespeichert werden. Die Ladung innerhalb einer Zelle würde in diesem Schema in der Mitte der Elementarzelle sitzen.

3.2.6 EB-Advance

Die beiden Maxwell-Gleichungen, die Zeitableitungen enthalten, (Gleichungen 1.1 und 1.2) lassen sich wie folgt umformen, um explizit die zeitlichen Änderungen des Systems

zu beschreiben:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = c \cdot \nabla \times \vec{B} - 4\pi \vec{j} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \cdot \nabla \times \vec{E} \quad (3.23)$$

Dank der speziellen Struktur des Yee-Gitters lassen sich die auftretenden Rotations-terme sehr einfach diskretisieren. Auch die Zeitableitung lässt sich einfach durch $\frac{\Delta E}{\Delta t}$ nähern.

Statt elektrisches Feld und magnetisches Feld beide gleichzeitig einen Zeitschritt in die Zukunft zu verlängern, bietet es sich jedoch an, die Updates zu staffeln, also ein zeitliches Leap-Frogging-Schema zu verwenden. Dies erhöht die Stabilität ähnlich wie ein Leap-Frogging-Schema, das abwechselnd Ort und Geschwindigkeit neu berechnet.

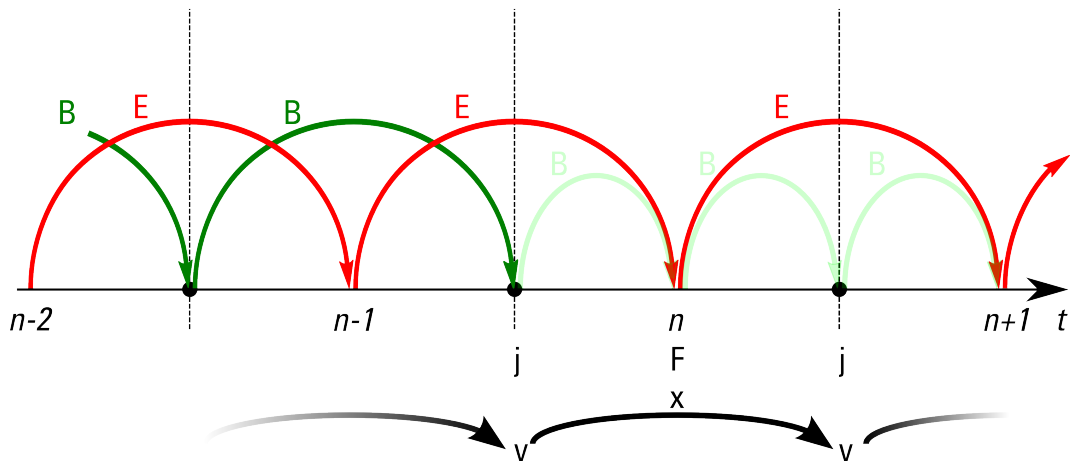


Abbildung 3.7: Elektrisches und magnetisches Feld sollen in Leap-Frog-Staffelung um einen Zeitschritt weiter berechnet werden. Die Berechnung der Kraftwirkung auf die Teilchen erfordert jedoch Kenntnis von beiden Feldern zum gleichen Zeitpunkt. Daher wird der Zeitschritt des Magnetfeldes in zwei Teile geteilt.

Ein Detail ist dabei jedoch zu berücksichtigen. Um zum Zeitpunkt t^n die Kraftwirkung auf die Teilchen zu berechnen müssen sowohl das elektrische Feld \vec{E}^n als auch das magnetische Feld \vec{B}^n zu diesem Zeitpunkt bekannt sein. Die Lösung für dieses Problem ist es den (in Abbildung 3.7 dunkelgrün gezeichneten) Zeitschritt für das magnetische Feld in zwei halbe (in Abbildung 3.7 hellgrün gezeichnete) Zeitschritte zu zerlegen.

Der gesamte Ablauf der inneren Schleife des Pic-Codes ist damit wie folgt: Im vorhergehenden Schleifendurchlauf wurde der Zeitschritt $\vec{E}^{n-1} \rightarrow \vec{E}^n$ berechnet. Der halbe

Zeitschritt für das magnetische Feld hat \vec{B}^n berechnet obwohl das Leap-Frogging eigentlich als nächstes $\vec{B}^{n+\frac{1}{2}}$ vorsehen würde. Jetzt kann die Kraft \vec{F} auf das Teilchen berechnet werden. Daraus wird die neue Geschwindigkeit $\vec{v}^{n+\frac{1}{2}}$ und der neue Ort \vec{x}^{n+1} berechnet werden.

Beim nächsten Aufruf von `EAdvance()` wird zuerst die zweite Hälfte des Leap-Frogging-Schrittes $\vec{B}^n \rightarrow \vec{B}^{n+\frac{1}{2}}$ berechnet. Damit kann dann der Schritt für das elektrische Feld $\vec{E}^n \rightarrow \vec{E}^{n+1}$ berechnet werden. Als letztes wird das magnetische Feld einen halben Schritt bis zu B^{n+1} gerechnet, damit für t^{n+1} beide Felder vorliegen.

3.3 Wahl der Quantisierung

In den vorhergehenden Abschnitten tauchen immer wieder der Abstand zweier Gitterpunkte Δx und die Länge eines Zeitschritts Δt auf. Auf der anderen Seite wurde nie erwähnt wie man diese Parameter wählt und welche Bedingungen dabei erfüllt sein müssen. Dies soll jetzt nachgeholt werden.

3.3.1 Räumliche Gittergröße

Um das Verhalten eines Plasmas richtig zu beschreiben ist es wichtig, die mikroskopischen Ladungsschwankungen im Plasma korrekt wiederzugeben. Daher darf die Kantenlänge der Gitterzellen Δx nicht über der Debye-Länge λ_D als charakteristische Längenskala der Schwankungen liegen. Im Gegenteil, wenn man den Raum feiner auflöst, so erhält man eine bessere Beschreibung des Plasmaverhaltens. Um welchen Faktor man besser auflösen sollte wird in diversen Papern wie zum Beispiel Cohen et al. [16] diskutiert. Der Code verwendet normalerweise $\Delta x = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_D$, erlaubt es aber den Raum noch feiner aufzulösen, wenn dies benötigt wird.

3.3.2 Zeitliche Schrittweite

Wie oben dargelegt kann man Δx nicht beliebig wählen. Doch auch die Größe eines Zeitschritts Δt unterliegt gewissen Beschränkungen. Die erste Einschränkung ist, daß Schwingungen der Plasmafrequenz ω_P aufgelöst werden müssen. Dazu muss folgende Ungleichung erfüllt werden (siehe [36, Gleichung 12] oder [6, Seite 56]):

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_P} \quad (3.24)$$

Als weitere Bedingung muss das sogenannte CFL-Kriterium erfüllt werden. Dieses wurde zuerst von Richard Courant, Kurt Friedrichs und Hans Lewy im Jahr 1928 bei der Untersuchung numerischer Näherungsverfahren von partiellen Differentialgleichungen formuliert. In modernerer Schreibweise definiert man für die numerische Lösung der Wellengleichung eine CFL-Zahl κ_{CFL} , die für eine korrekte Lösung kleiner als eins sein muss.

$$\kappa_{\text{CFL}} = \frac{c \cdot \Delta t}{\Delta x} < 1 \quad (3.25)$$

Dabei ist c die Geschwindigkeit der schnellsten Welle, die man korrekt wiedergeben will oder muss. Im Falle des verwendeten PIC-Codes handelt es sich dabei um elektromagnetische Wellen und damit ist c die Lichtgeschwindigkeit. Die Länge eines Zeitschritts muss damit zusätzlich zum obigen Kriterium auch die folgende Ungleichung erfüllen. Der Faktor $\sqrt{3}$ ist dabei dem Umstand geschuldet, daß sich die Wellen auch entlang der Raumdiagonale der Elementarzelle bewegen können. Bei einem zweidimensionalen Code würde hier ein Faktor $\sqrt{2}$ genügen.

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{\sqrt{3} c} \quad (3.26)$$

Das CFL-Kriterium ist selbst bei ultrarelativistischen Teilchen mit großer thermischer Geschwindigkeit v_{th} und damit großer Debye-Länge λ_D die stärkere Forderung.

Die so bestimmte Schrittlänge ist dabei eine Grenze zwischen Stabilität und Instabilität. Größere Zeitschritte führen zu Simulationen, die recht schnell instabil werden. Setzt man Δt genau auf den Wert aus Gleichung 3.26, so bleibt die Simulation für einige Dutzend Schwingungen der Plasmafrequenz ω_p stabil. Dividiert man Δt noch durch 1.00001 so bleibt die Simulation (bei einer Größe von 8x8x8 Zellen) für mehr als 5000 ω_p ohne erkennbare numerische Probleme stabil. Der Fehler in der Gesamtenergie bleibt dabei immer unter zwei Prozent.

3.4 Randbedingungen

Außer der Beschreibung des Innenraums muss man auch die Behandlung der Grenzen des simulierten Gebiets bedenken. Bei idealen Randbedingungen hätten diese keinen Einfluss auf die Ergebnisse im Innenraum. Reale Randbedingungen weichen von diesem Ideal mehr oder weniger ab.

3.4.1 Periodische Ränder

Die einfachsten Randbedingungen sind periodische Ränder. Hier nummeriert man die n Zellen von 0 bis $n-1$ durch. In der letzten Zelle werden alle Zugriffe in die Zelle mit höherer Nummer auf die Zelle 0 abgebildet, die Zellen werden also zu einem Ring geschlossen. In zwei Dimensionen werden die beiden Raumrichtungen die n_x und n_y Zellen umfassen getrennt abgeschlossen. Der resultierende Raum ist topologisch identisch zu einem Torus. Auch in der dritten Dimension kann der Raum so abgeschlossen werden.

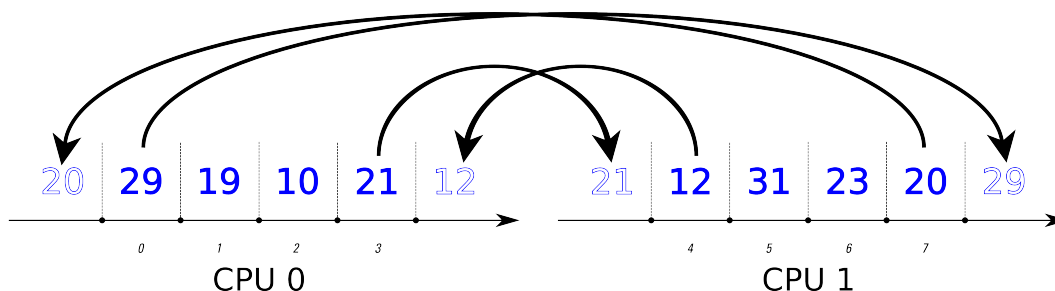


Abbildung 3.8: Das Umkopieren des Randfeldes (hier für eine zufällige Komponente des elektrische Feldes gezeigt) zwischen zwei CPUs erlaubt es die Simulation auf mehrere CPUs zu verteilen und liefert ohne Mehraufwand periodische Ränder.

Der Code implementiert die periodischen Ränder nicht durch direktes Umrechnen der Koordinaten sondern durch sogenannte „ghostfields“. Dazu werden nach jedem Schritt die unteren r Zellen $0 \dots r$ in extra Zellen $m \dots m+r-1$ kopiert. Abbildung 3.8 illustriert dies für eine einzelne Randzelle, also $r = 1$. Analog werden die oberen Zellen ans untere Ende kopiert. Dieses Verfahren ist etwas aufwändiger und benötigt mehr Speicherplatz, wird jedoch von dem Code, der die Kommunikation zwischen mehreren CPUs zuständig ist, mit erledigt und reduziert so die Komplexität des Simulationsprogramms.

Diese Art der Randbedingungen ist sehr einfach zu implementieren und beeinflusst den Innenraum wesentlich weniger als feste Ränder. Der einzige starke Einfluss ist die Quantisierung des elektromagnetischen Spektrums, analog zum Innenraum eines Hohlleiters.

Abbildung 3.9 illustriert diesen Effekt. Analog zu Abbildung 1.1 wertet man die Besetzung von Wellenmoden in einem thermischen Plasma aus. Diesmal mittelt man jedoch in der x - z -Ebene und führt die Fouriertransformation entlang der y -Achse durch. Da in dieser Richtung nur 32 Zellen simuliert wurden sind nur 32 unabhängige Werte von k_y möglich. Diese weisen diskrete Werte von ω auf, so daß man den stufenförmigen Verlauf

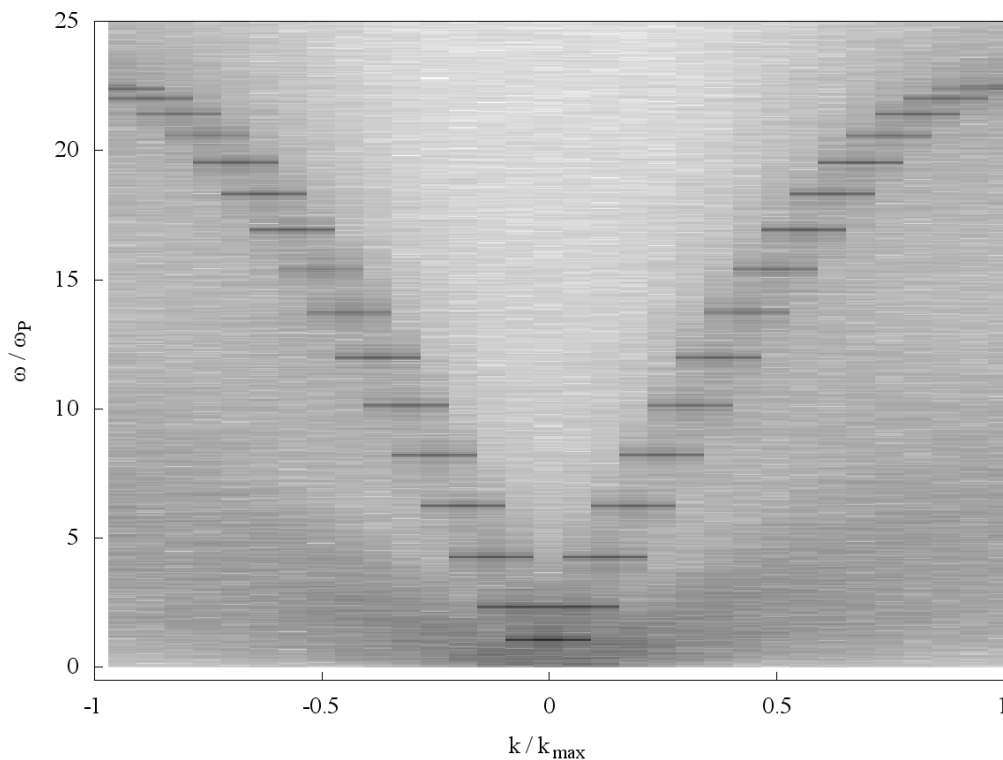


Abbildung 3.9: Dispersionrelation analog zu Abbildung 1.1 mit geringer räumlicher Auflösung und periodischen Rändern

der Dispersionrelation in Abbildung 3.9 erhält.

3.4.2 Absorbierende Ränder

Eine andere mögliche Wahl für die Randbedingungen sind absorbierende Randbedingungen. Diese absorbieren auslaufende elektromagnetische Wellen und verhindern so die Quantisierung des Spektrum.

Werden sie am hinteren Ende der Vorzugsrichtung eingesetzt, so absorbieren sie den auftreffenden Laserpuls und verhindern, daß dieser reflektiert wird und erneut durch das Plasma läuft. Das Plasma wird also nicht durch die zurücklaufende Reflexion des Laserpulses gestört und man kann eine kürzere Simulationsbox verwenden, oder alternativ bei gleicher Größe das Verhalten des Plasma länger beobachten.

Auch andere Einflüsse der Wand werden durch die Wahl absorbierender Randbedingungen verringert, so daß man die Simulationsbox kleiner wählen kann ohne das Verhalten des Plasma im Innenraum zu stören. Auf diese Weise lässt sich Rechenzeit sparen

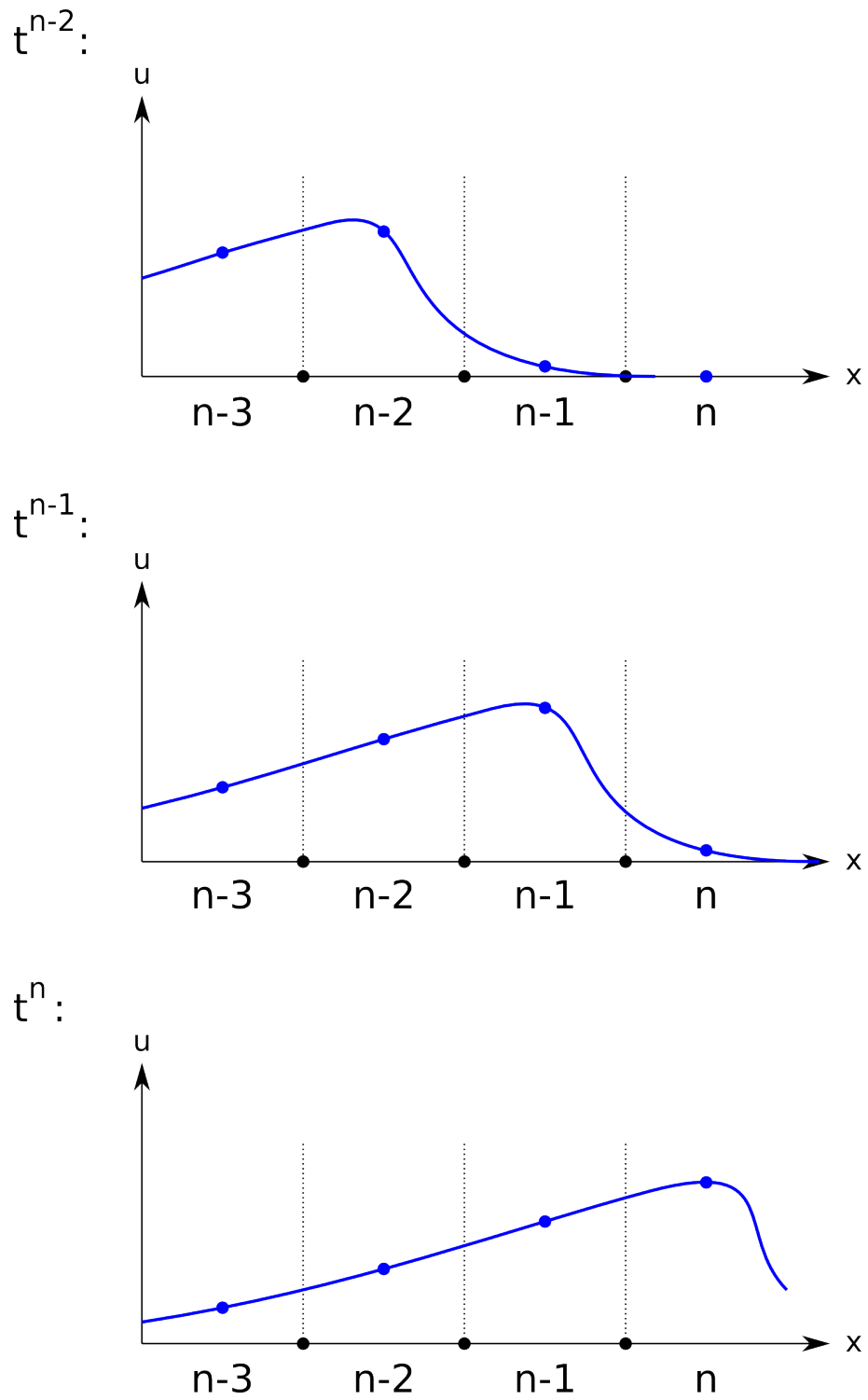


Abbildung 3.10: Illustration zur Erklärung des Verfahrens von Liao in zweiter Ordnung, das den Randpunkt u_n zur Zeit t^n polynomial aus den Punkten u_{n-1} zur Zeit t^{n-1} und u_{n-2} zur Zeit t^{n-2} interpoliert.

und der Zyklus aus Wahl der Parameter, Simulation und Auswertung verkürzt sich.

Eine Möglichkeit, absorbierende Ränder zu implementieren, ist die polynomiale Extrapolation der Felder im Innenraum nach dem Schema von Liao. Diese Randbedingungen bieten sehr gute Absorption unabhängig vom Winkel, unter dem die Welle auf die absorbierende Wand trifft und erfordern keinen großen Rechen- oder Speicheraufwand. Da das Originalpaper Liao et al. [37] trotz ausführlicher Recherche nicht über die Bibliothek der Universität Würzburg erhältlich ist, stützt sich die Implementation der Randbedingungen, die im Rahmen diese Arbeit programmiert wurde, auf die Beschreibung in Taflove & Hagness [50], Seite 265 ff.

Abbildung 3.10 zeigt das Prinzip der Liao-Randbedingungen. Um eine Reflexion zu verhindern, muss man den Wert u_n an der Stelle n aus den Werten im Innenraum interpolieren. Um dies für den Zeitschritt t^n zu tun stehen einem prinzipiell die Punkte $u_0 \dots u_{n-1}$ für die Zeiten t^0 bis t^{n-1} zur Verfügung. Die Liao-Randbedingungen L ter Ordnung verwenden davon die Punkte $u_{n-1}^{n-1} \dots u_{n-(L+1)}^{n-(L+1)}$ und extrapoliert polynomial. Das Liao-Verfahren erlaubt auch die Verwendung weiterer Stützpunkt zwischen den simulierten u_i . Da diese jedoch nicht von der Simulation direkt berechnet werden, sondern interpoliert werden müssen vermeidet man dies meist.

Als problematisch hat sich hierbei erwiesen, daß die Extrapolation auf die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle abgestimmt werden muss. Diese kann im Plasma aber deutlich von der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum abweichen. Dadurch absorbieren die Ränder deutlich schlechter als in FDTD-Codes wo sich die Felder im Vakuum (oder in Luft) ausbreiten.

Außerdem muss die folgende Ungleichung erfüllt sein, die die Länge eines Zeitschritts Δt und die kürzeste Wellenlänge λ , die gedämpft werden kann, verknüpft.

$$\sin\left(\frac{\pi c \Delta t}{\lambda}\right) < \frac{1}{2} \quad (3.27)$$

Treten kürzere Wellenlängen auf, so divergiert im schlimmsten Fall das Randfeld durch die Extrapolation und strahlt Felder in den Innenraum ab. Die kürzeste mögliche Wellenlänge ist $\lambda = 2 \Delta x$. Dies ergibt in Limit für die maximale erlaubte Schrittlänge:

$$\Delta t < \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{c} \quad (3.28)$$

Diese Schrittlänge ist etwa 15 Prozent kürzer, als die nach Ungleichung 3.26 vom CFL-Kriterium erlaubte Schrittweite.

Eine Alternative wären Ränder nach der Methode des „Perfectly Matched Layers“

(PML), wie es von einigen anderen PIC-Codes implementiert wird, zum Beispiel vom Osiris Code, wie er in [24] beschrieben ist. Hier wird der Simulationsraum von einer Schicht mit genau angepasster Impedanz aber nicht verschwindender Leitfähigkeit umgeben. Dadurch werden keine Wellen am Übergang reflektiert, im Material werden die Wellen dann aber exponentiell gedämpft (siehe [5] oder [50, Seite 285 ff]). Eine alternative, aber effektiv identische Formulierung verändert die Koordinaten in der Wellengleichung (siehe [15]). Der Rechenaufwand ist jedoch bei beiden Methoden deutlich höher als bei der Methode von Liao und auch die Komplexität des Codes ist deutlich höher.

Ein generelles Problem aller absorbierenden Ränder ist die Absorption der hinausfliegenden Teilchen. Natürlich kann man alle Teilchen die aus dem Simulationsgebiet herausfliegen einfach löschen und neue Teilchen mit korrekter Geschwindigkeitsverteilung injizieren.

Die Teilchen sind jedoch keine Punktteilchen, sondern ausgedehnte, wolkenförmige Objekte. Daher stellt sich die Frage ob man das Teilchen entfernen soll, wenn es die Wand, die die elektromagnetische Strahlung absorbiert, das erste mal berührt, wenn es komplett hinter der Wand liegt, oder an irgendeiner Stelle dazwischen.

Entfernt man das Teilchen sobald es in Kontakt mit der Wand kommt, so erzeugt man einen Bereich an der Wand, der weniger Teilchen enthält als das Innere des Plasmas. Wenn man dagegen das Teilchen erst hinter der Wand entfernt, dann gibt es einen Bereich in dem das Teilchen nur wenig elektrische und magnetische Felder erfährt und damit weniger Kräften ausgesetzt ist, als im Inneren des Plasma. Welche Methode tatsächlich die besten Ergebnisse liefert, ist a priori nicht ganz klar. Testläufe mit einer ebenen Welle, die durch ein thermisches Plasma läuft haben jedoch ergeben, daß es etwas günstiger ist die Teilchen zu absorbieren wenn sie gerade die Wand berühren.

3.5 Startbedingungen

Das Verhalten eines physikalischen Systems wird, außer von den Randbedingungen, die in Abschnitt 3.4 besprochen wurden, von seinen Startbedingungen festgelegt. Daher sollen in diesem Abschnitt die verwendeten Bedingungen beim Start einer Simulation zum Zeitpunkt $t = 0$ erläutert werden.

3.5.1 Plasma

Zu Beginn der Simulation gibt es (maximal) zwei Teilchenpopulationen, die Protonen, Elektronen und Positronen enthalten können. Beide Populationen können unterschiedliche Temperaturen besitzen. Zusätzlich ist es möglich, für jede Population eine mittlere Geschwindigkeit abzugeben, die relativistisch korrekt auf die thermische Geschwindigkeit aufaddiert wird. Bei den Simulationen für diese Arbeit wurde nur eine Teilchenpopulation, die Protonen und Elektronen zu gleichen Anteilen enthielt, verwendet. Dafür wurde teilweise von der Möglichkeit gebraucht gemacht, in der Mitte des Plasmas einen Kanal niedrigerer Dichte zu schaffen um den Laserstrahl zu führen. Nähere Details hierzu finden sich in Abschnitt 1.3.2.

Die verwendeten Anfangsbedingungen für die elektrischen und magnetischen Felder sind ebenso einfach wie unphysikalisch. Beide Felder werden mit Null initialisiert. Dies ist natürlich inkorrekt, da in einem fluktuierenden thermischen Plasma sowohl elektrische als auch magnetische Felder vorhanden sind, die um den Mittelwert Null herum verteilt sind.

Um das elektrische Feld zu bestimmen müsste man die Poisson-Gleichung 1.14 für das skalare Potential Φ lösen. In der Coulomb-Eichung könnte man dann das elektrische Feld bestimmen:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \quad (3.29)$$

Angesichts der Teilchenzahl und der Größe des Simulationsgebiets ist es jedoch sehr aufwändig, die Poisson-Gleichung zu lösen. Die äquivalente Gleichung für das Vektorpotential \vec{A} , aus dem sich die Magnetfelder bestimmen ließen, ist sogar noch aufwändiger:

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (3.30)$$

Diese Gleichung ist keine reine Poisson-Gleichung mehr und lässt sich daher auch nicht so einfach lösen wie Gleichung 3.29. Verwendet man statt der Coulomb-Eichung die Lorenz-Eichung, so erhält man für Φ und \vec{A} Wellengleichung. Die korrekte numerische Lösung dieser Gleichungen ist nicht einfach und bedarf ausgefeilter Methoden, um ein unnatürliches Anschwingen oder Anwachsen zu vermeiden.

Aus diesem Grund berechnet man nicht die korrekten Felder, sondern wählt die vereinfachten Anfangsbedingungen und gibt dem Plasma Zeit einzuschwingen. Binnen weniger Periodenlängen ω der Plasmaschwingungen bilden sich nämlich die korrekten und konsistenten Felder aus. Der Rechenaufwand für die Einschwingzeit liegt dabei unter dem Aufwand, die Felder für den ersten Zeitschritt zu berechnen. Zusätzlich spart man sich

die Programmierung und Pflege des Codes um die Felder beim Start zu berechnen.

Die Energie, die nach dem Einschwingen in den elektromagnetischen Feldern steckt, stammt natürlich aus der Energie die die Teilchen zu Beginn der Simulation haben. Das Plasma wird also effektiv leicht gekühlt. Der Effekt ist jedoch klein und liegt je nach genauen Parametern bei Bruchteilen eines Prozents bis maximal einigen wenigen Prozent.

3.5.2 Laser

Außer dem Ausgangszustand des Plasmas muss auch der Laserstrahl vorgegeben werden. Je nachdem, ob der Laserstrahl sich schon zu Beginn im Simulationsgebiet befindet oder erst später durch eine Grenze des Simulationsgebietes eingestrahlt wird, handelt es sich um eine Startbedingung oder eine (zeitabhängige) Randbedingung. Davon unabhängig soll hier diskutiert werden, wie sich in einer PIC-Simulation ein relativistischer Laserpuls modellieren lässt.

Die übliche Beschreibung für einen Laserstrahl entlang der z -Achse lässt sich zum Beispiel in [56, Gleichung 3-22] finden und lautet:

$$E(x, y, z) = \frac{E_0 w_0}{w(z)} \exp\left\{-\frac{r^2}{w^2(z)}\right\} \cdot \exp\left\{-i\left(kz - \tan^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right)\right)\right\} \cdot \exp\left\{\frac{-i k r^2}{2 R(z)}\right\} \quad (3.31)$$

Dabei ist z_R die Rayleigh-Länge aus Gleichung 1.74, $w(z)$ ist der Strahldurchmesser, in der Entfernung z vom Fokuspunkt und $R(z)$ ist der Radius, der die Krümmung der Wellenfront beschreibt. Es gilt:

$$w^2(z) = w_0^2 \left(1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2\right) \quad (3.32)$$

$$R(z) = z \left(1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2\right) \quad (3.33)$$

Man erkennt in Gleichung 3.31 drei Teile, die unterschiedliche Aspekte des Lasers beschreiben. Der erste Term gibt die Entwicklung der Amplitude an. Der zweite Term beschreibt das longitudinale Verhalten der Phase und der dritte das radiale Verhalten der Phase.

Diese Beschreibung erfasst die wichtigsten Phänomene korrekt, wie zum Beispiel die Divergenz des Strahls und die nicht verschwindende transversale Ausdehnung des Laserstrahls im Fokus. In Formel 3.31 wird das elektrische Feld jedoch als Skalar beschrieben,

es fehlt also die Angabe der Richtung des Feldes.

Einige Quellen wie zum Beispiel [11, Gleichung 4.39] gehen soweit dem Feld eine konstante Richtung zu geben. Dies stützt sich auf die Tatsache, daß ebene elektromagnetische Wellen rein transversal sind. Für einen fokussierten Laser ergibt sich dabei jedoch ein Problem: erkennbar zum Beispiel, wenn man die Divergenz von Gleichung 3.31 betrachtet. Diese ist nicht identisch Null, was laut dem Gaußschen Gesetz eine nichtverschwindende Ladungsdichte bedeutet. Dies ist im Vakuum sicher nicht korrekt.

Anschaulich ist klar woran das liegt: Das elektrische Feld muss im rechten Winkel auf dem k -Vektor stehen. Für eine ebene Welle zeigt dieser an jeder Stelle des Raums in die gleiche Richtung, was sich mit einer konstanten Richtung des elektrischen Feldes verträgt. Ein fokussierter Strahl hat jedoch eine nicht verschwindende Divergenz und damit nicht homogene (und nicht parallele) k -Vektoren an unterschiedlichen Stellen im Raum.

Dementsprechend kann das elektrische Feld nicht immer die gleiche Richtung haben, sondern muss an unterschiedlichen Stellen unterschiedlich orientiert sein, um im rechten Winkel zum lokalen k -Vektor zu stehen. Dies analytisch aus den Maxwell-Gleichungen zu erhalten ist recht kompliziert.

Sehr hilfreich waren hier die Paper von K. McDonald (darunter [40]), in denen er beschreibt, wie man für einen Strahl mit kleiner Divergenz eine näherungsweise Lösung konstruieren kann. Die Grundidee ist hierbei, daß ein Strahl mit kleiner Divergenz an jeder Stelle einen k -Vektor hat, der nur wenig von der Strahlachse abweicht. Da das lokale elektrische Feld immer senkrecht auf dem lokalen k -Vektor steht, weicht auch das elektrische Feld nur wenig von der rechtwinklig zur Strahlachse stehenden Polarisationsrichtung ab. Die Anteile des elektrischen Feldes, die längs der Strahlachse liegen, lassen sich also nach Potenzen der Divergenz $\theta < 1$ entwickeln.

Verwendet man diese Beschreibung, so erhält man eine viel bessere Modellierung eines Laserstrahl, die eine wesentlich kleine Divergenz des elektrischen und magnetischen Feldes aufweist. Anschaulich wird dies auch, wenn man Abbildung 3.11 betrachtet. Die Pfeile, die die Richtung des elektrischen Feldes anzeigen, folgen der Krümmung des Feldes und stehen damit senkrecht auf der lokalen Ausbreitungsrichtung. Außerdem erkennt man gut, wie der Laserpuls sich nach dem Durchlaufen des Fokuspunktes wieder langsam aufweitet, genau wie man es anhand der Skizze 1.3 erwartet.

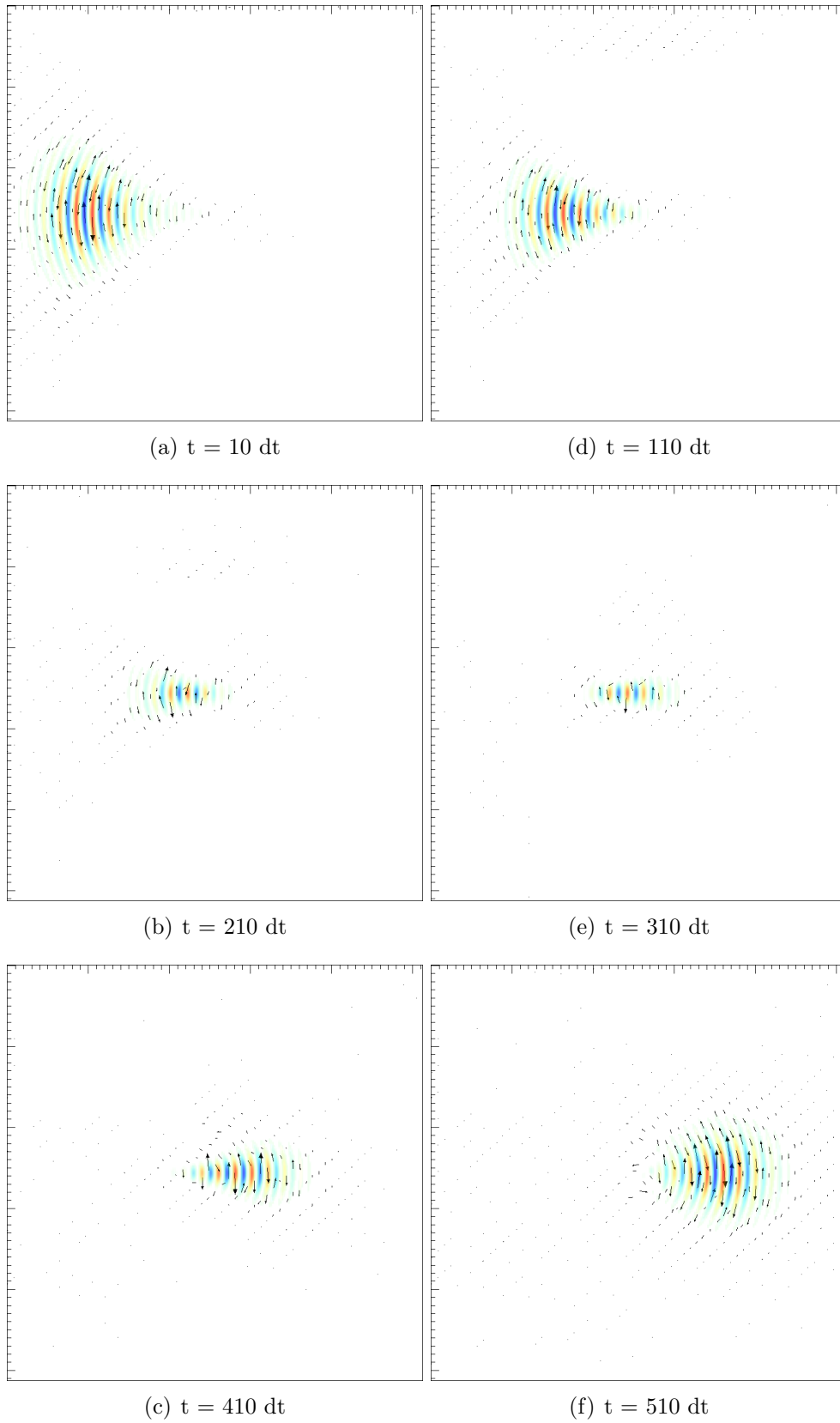


Abbildung 3.11: Ausbreitung eines Laserpulses im Vakuum

3.6 Methoden zur Parallelisierung

Da man ein gewisses physikalisches Raumvolumen simulieren will aber die Quantisierung nicht beliebig grob machen kann, bleibt einem als Ausweg nur eine große Anzahl an Gitterzellen zu verwenden. Bei den Simulationen für diese Diplomarbeit wurden Gitter mit ein bis vier Millionen Zellen Größe verwendet. Einzelne Simulationen erreichten Größen von bis zu 66 Millionen Zellen.

Für die zeitliche Quantisierung unterliegt man ähnlichen Beschränkungen. Der Laserpuls ist zwar nur einige Femtosekunden lang und auch die Reaktion des Plasmas spielt sich in typischer Weise auf einer Zeitskala von Femtosekunden ab, ein einzelner Zeitschritt ist jedoch nur im Bereich von zehn Attosekunden. Man benötigt daher einige Tausend bis Zehntausend Zeitschritte, um die Entwicklung beobachten zu können. Jede Gitterzelle enthält etliche Protonen und Elektronen, so daß man insgesamt etwa 50 bis 200 Millionen Teilchen in jedem Schritt abarbeiten muss. Selbst auf modernen und leistungsstarken Computern, die diese Simulationen überhaupt erst möglich machen, benötigt man für eine einzelne Simulation Hunderte oder Tausende an CPU-Stunden. Um erträgliche Wartezeiten zu erreichen ist es daher nötig die Berechnung auf möglichst viele CPUs zu verteilen. Einen Eindruck von der benötigten Rechenleistung gewinnt man, wenn man betrachtet, daß eine einzelne moderne CPU (ein Xeon E5504 mit 2 Gigahertz Taktfrequenz) etwa 20 Minuten braucht um einen $32 \times 32 \times 32$ Würfel mit acht Elektronen und acht Protonen pro Zelle 100 Zeitschritte lang zu simulieren.

3.6.1 MPI

Eine weit verbreitete Möglichkeit um viele Rechner gemeinsam an einem großen Problem rechnen zu lassen ist, auf jedem Rechner eine Instanz des Programms zu starten und die einzelnen Instanzen über MPI (Message Passing Interface) miteinander kommunizieren zu lassen. Diese Möglichkeit wurde von Urs Ganse implementiert und hat es erlaubt, die Simulation mit sehr guter Effizienz auf bis zu 64 CPUs laufen zu lassen. Skalierungstests haben sogar gezeigt, daß der Code mindestens bis zu 1024 CPUs vernünftig skaliert, also vom Zugewinn an Rechenkraft profitiert.

3.6.2 CUDA

Eines der Ziele dieser Diplomarbeit war es zu versuchen, die ungeheure Rechenkraft moderner Graphikkarten für Simulationen mit dem PIC-Code nutzbar zu machen. Statt die

Simulationsbox in mehrere Teile zu teilen, die dann auf mehreren CPUs simuliert werden, definiert man hier Funktionen, die einen kleinen Teil eines Zeitschrittes abdecken. Diese Funktionen werden dann auf der Graphikkarte parallel für unabhängige Eingabedaten ausgeführt.

Eine Funktion, die man definiert, ist `move_particle()`. Diese Funktion erwartet den Zustand eines Teilchens zur Zeit $t^{n-\frac{1}{2}}$ und berechnet den Zustand zur Zeit $t^{n+\frac{1}{2}}$. Zusätzlich benötigt die Funktion Zugriff auf die elektrischen und magnetischen Felder zur Zeit t^n . Der Updateschritt für ein einzelnes Teilchen hängt dabei nicht vom Zustand der anderen Teilchen ab und kann damit für viele Teilchen gleichzeitig durchgeführt werden.

Man erkennt bereits, daß diese Art der Programmierung sich deutlich von der Programmierung einer CPU unterscheidet, bei der man nach einander alle lokalen Teilchen updatet. Außerdem unterstützen die Tools der verwendeten „Compute Unified Device Architecture“ (CUDA), mit der die Nvidia Graphikkarte programmiert werden sollte, kein C++. Damit fehlte die Unterstützung für die verwendeten Klassen der Blitz-Bibliothek, die im PIC-Code für die Speicherung der elektrischen und magnetischen Felder und für einige Vektoroperationen benutzt werden.

Dadurch wurde es nötig den PIC-Code neu zu strukturieren und an vielen Stellen umzuschreiben. Bei der schon erwähnten Funktion `move_particle()` war dies relativ einfach möglich. Die so erhaltene Funktion kann dann auf bis zu 256 Teilchen gleichzeitig ausgeführt werden.

Auch die Berechnung der neuen elektrischen Felder aus den vorhandenen Feldern mit der Funktion `update_E()` ist einfach. Das elektrische Feld an einem Punkt hängt nur vom elektrischen Feld an dieser Stelle zum vergangenen Zeitschritt und die umgebenden magnetischen Felder ab. Das Update der magnetischen Felder um einen halben Zeitschritt ist ganz analog in der Funktion `half_update_B()` implementiert.

An dieser Stelle zeigt sich jedoch, daß eine naive Umstrukturierung nicht genug ist. Um die Graphikkarte voll auszulasten ist es nötig für jede Komponente des elektrischen Feldes eine eigene, optimierte Updatefunktion zu schreiben. Dies erlaubt es schnelleren Code zu schreiben, unter anderem dadurch, daß Fallunterscheidungen wegfallen, die auf Graphikkarten sehr langsam abgearbeitet werden. Die Optimierung sind jedoch zum Großteil Handarbeit, da die gegenwärtig verfügbaren Compiler nicht weit genug entwickelt sind, um solche Möglichkeiten automatisch zu erkennen. Dies macht die Programmierung der Graphikkarte sehr aufwändig und fehleranfällig.

Als besonders schwierig zu optimieren erwies sich die Funktion `current_assign()`, in der der Strombeitrag eines einzelnen Teilchens berechnet und zum Gesamtstrom addiert

wird. Da jedes Teilchen Strombeiträge in mehreren Zellen liefert, muss man sehr darauf achten, daß konkurrierende Schreibzugriffe korrekt behandelt werden. Da mehrere Teilchen, die sich nahe beieinander befinden, Beiträge zur gleichen Zelle liefern können lässt sich das Problem auch nicht durch Umformulieren der Aufgabenstellung von „trage die Strombeiträge eines Teilchen in die umliegenden Zellen ein“ zu „berechne den Strombeitrag aller relevanten Teilchen zu dieser Zelle“ beseitigen.

Letzten Endes blieb nichts anderes übrig als die Strombeiträge mit der langsamen Funktion `atomic_add` aufzusummieren, die die Schreibzugriffe serialisiert und so Kollisionen verhindert. Diese Lösung ist jedoch recht langsam, so daß die Geschwindigkeitsgewinne, die sich an anderen Stellen erzielen lassen, hier wieder verloren gehen.

Als der Code nach einigen Wochen Entwicklungszeit endlich vollständig portiert war und mit einer Geschwindigkeit ähnlich wie auf der CPU lief, traten bei Simulationen mit mehr als einigen hundert Zeitschritten numerische Instabilitäten auf. Daher wurde der Versuch den PIC-Code auf der Graphikkarte zu verwenden aus Zeitgründen vorläufig aufgegeben.

Versuchsweises verkleinern des Zeitschrittes um ein zehntel Prozent hat die Stabilität inzwischen deutlich verbessert, so daß Simulationen über 10000 Zeitschritte möglich sind. Die Speichermenge auf der Graphikkarte beschränkt dabei jedoch die Größe des simulierten Raumgebietes und die praktisch erreichbare Rechenkraft liegt deutlich unter der theoretisch verfügbare Rechenleistung.

Neue Generationen an Graphikkarten und bessere Werkzeuge für die Programmierung könnten die Situation aber weiter verbessern, so daß es sich lohnt, diese Möglichkeit im Auge zu behalten.

4 Ergebnisse

4.1 Surfatron-Beschleunigung

Der Surfatron-Beschleunigungsprozess, wie er in [33] und Abschnitt 1.4.3 beschrieben ist, verwendet ein longitudinales elektrisches Feld und, im rechten Winkel dazu, ein konstantes magnetisches Hintergrundfeld. Diese Situation ist in Abbildung 4.1 gezeigt.

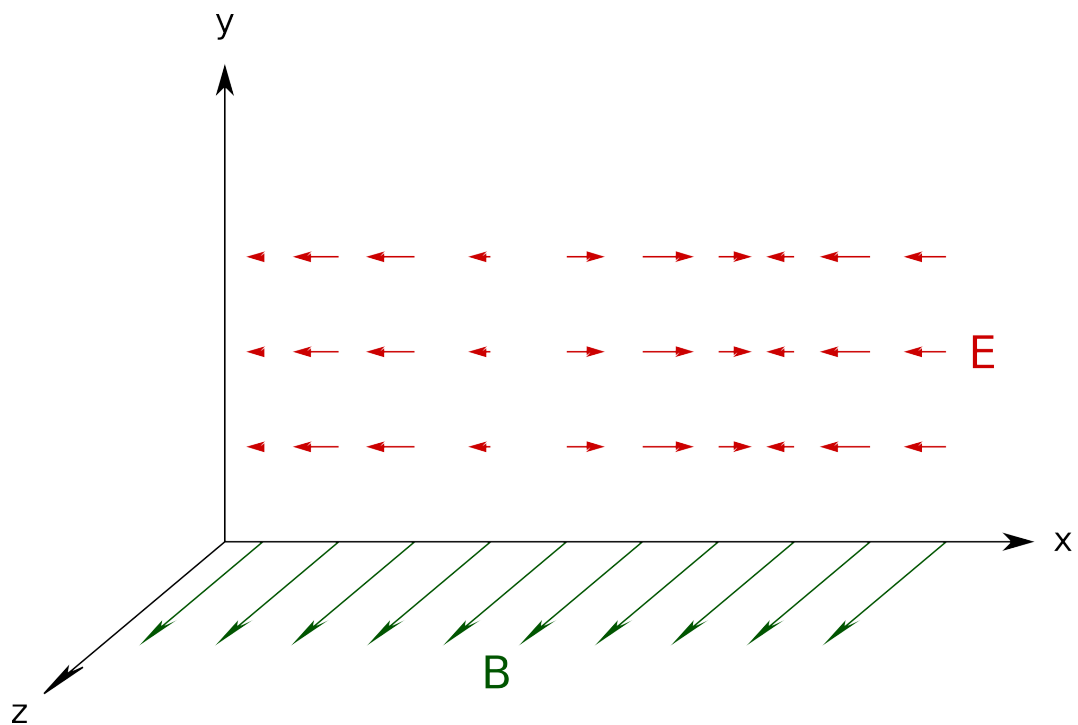


Abbildung 4.1: Statisches Magnetfeld in Grün entlang der z -Achse aus der Zeichenebene, dazu entlang der x -Achse in rot die longitudinale elektrostatische Welle. In dieser Konfiguration können Teilchen nahe an der Phasengeschwindigkeit der Welle auf dem positiven (nach rechts zeigenden) elektrischen Feld „surfen“ und so Energie gewinnen.

Dies ist so jedoch keine Lösung der Maxwell-Gleichungen. Die in Abschnitt 1.2.8 beschriebenen Hybridwellen kommen dieser Situation jedoch schon recht nahe. Abbildung

4.2 zeigt das elektrische und magnetische Feld für eine Hybridwelle, sowie zusätzlich die daran gekoppelten Ströme und Dichteschwankungen im Plasma.

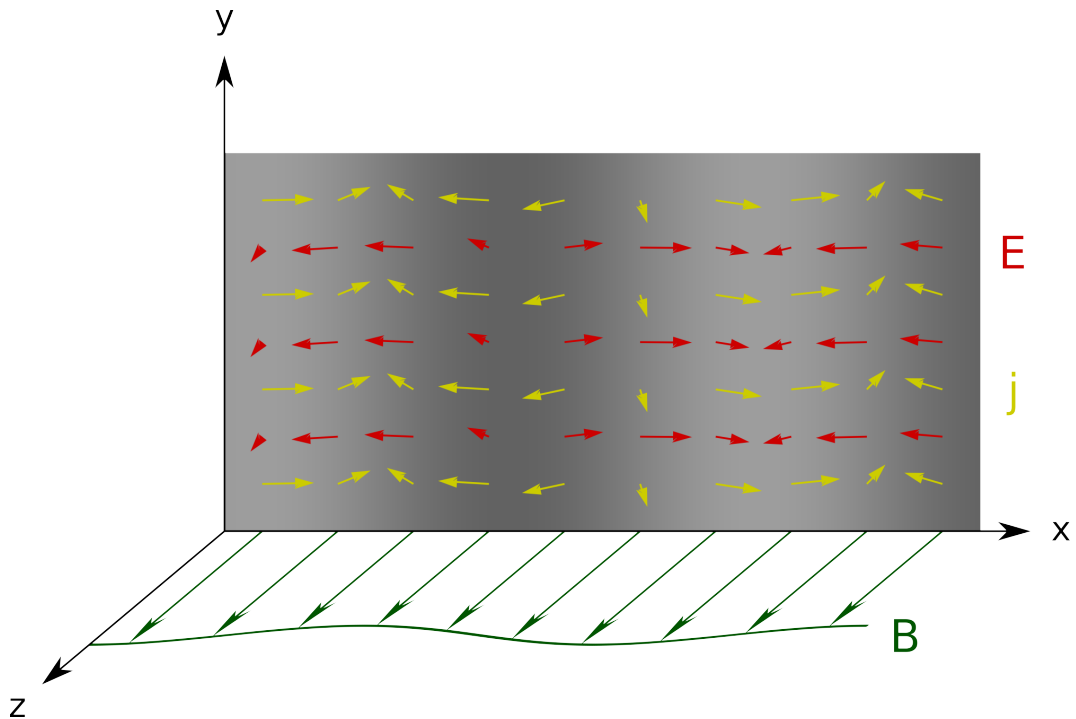


Abbildung 4.2: Magnetfeld in Grün und elektrisches Feld in Rot analog zu Abbildung 4.1. Zusätzlich die Ströme im Plasma in Gelb und die Dichte der Elektronen in Graustufen. Dunkles Grau bedeutet dabei große Dichte.

Das Magnetfeld ist nicht mehr homogen, sondern enthält eine harmonische Komponente, die wie $\cos x$ variiert. Relativ zum konstanten Anteil des Magnetfelds ist dieser Anteil jedoch klein. Er beträgt für die gewählten Simulationsparameter nur gut ein Prozent und ist in Abbildung 4.2 übertrieben groß dargestellt.

Das elektrische Feld erhält außer dem Longitudinalanteil noch einen um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschobenen transversalen Anteil. Die Stärke dieses Anteil beträgt nur knapp ein Prozent verglichen mit dem beschleunigenden longitudinalen Anteil des elektrischen Felds und ist in der Abbildung deutlich überhöht dargestellt.

Der in Gelb dargestellte Strom besitzt ebenfalls einen transversalen und einen longitudinalen Anteil, die um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben sind. Der Großteil ist dabei in x -Richtung und rührt von Teilchen her, die vom starken longitudinalen elektrischen Feld verschoben werden. Der transversale Anteil in y -Richtung beträgt knapp ein Prozent davon.

Bei der Hybridwelle ist die Teilchendichte an die elektromagnetischen Felder gekoppelt.

In jedem Minimum des Magnetfeldes befindet sich ein Maximum an Elektronen. Der Unterschied zwischen einem Maximum der Dichte und einem Minimum beträgt dabei etwa elf Prozent der mittleren Elektronendichte.

Zusammenfassend lässt sich sagen, daß die Hybridwelle der gewünschten Situation sehr nahe kommt, da die auftretenden transversalen Komponenten im Prozentbereich liegen und keine großen Auswirkungen auf die Teilchenbeschleunigung haben.

4.1.1 Simulationsbedingungen

Die Simulation zur Surfatron-Beschleunigung verwendet eine 1024 Zellen lange und 32 x 32 Zellen breite Box entlang der Ausbreitungsrichtung, die mit der x -Achse zusammenfällt. Die Kantenlänge einer Zelle ist dabei $\Delta x = 0,115672 \mu\text{m}$. Ein einzelner Zeitschritt ist $\Delta t = 0.222542 \text{ fs}$. Die Ränder des Raumgebiets sind periodisch, die Teilchen „sehen“ also einen unendlich ausgedehnten Raum.

Elektronen und Protonen haben das natürliche Massenverhältnis von 1:1836 und jeweils 136 Teilchen einer Spezies sind zu einem Metateilchen zusammen gefasst. Von diesen Metateilchen befinden sich im Mittel vier Elektronen-Repräsentanten und vier Protonen-Repräsentanten in einer Zelle. Dies liefert ein Plasma mit einer Dichte von $2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ und einer Plasmafrequenz von $\omega_P = 5,64145 \cdot 10^{13} \frac{1}{\text{s}}$. Die Temperatur des Plasmas wird durch die mittlere thermische Geschwindigkeit $v_{th} = 2,1\% c$ gegeben.

Die Hybridwelle propagiert durch ein Hintergrundmagnetfeld der Stärke $B_0 = 300 \text{ kG}$ mit $k \approx 4500 \frac{1}{\text{cm}}$ so daß 8 Schwingungen in die Simulationsbox passen. Der Parameter u_x (ein Maß für die Amplitude der Hybridwelle) wurde auf 10^9 cm/s gesetzt. Alle anderen Parameter lassen sich aus den Formeln in Abschnitt 1.2.8 berechnen oder im Anhang B nachschlagen.

4.1.2 Phasenraumplots

Die Teilchen werden vom elektrischen Feld größtenteils in x -Richtung beschleunigt. Zusätzlich werden sie vom Magnetfeld in y -Richtung abgelenkt. Um die Beschleunigung zu verfolgen, betrachtet man also $v_{\perp} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Im folgenden werden nun einige Schnitte durch den Phasenraum gezeigt, die die Verteilung der Teilchen in der $x - v_{\perp}$ - Ebene darstellen. Zusätzlich zu Position und Geschwindigkeit der Teilchen wird der longitudinale Anteil des elektrischen Felds gezeigt. Dabei sind weiße Bereiche im Plot Bereiche mit positivem, beschleunigendem elektrischen Feld.

Die Teilchengeschwindigkeiten gehen von nahe Null bis zu etwa zehn Prozent der Lichtgeschwindigkeit. An der Unterkante des Bandes erkennt man gut daß die Länge der Simulationsbox acht Wellenlängen entspricht.

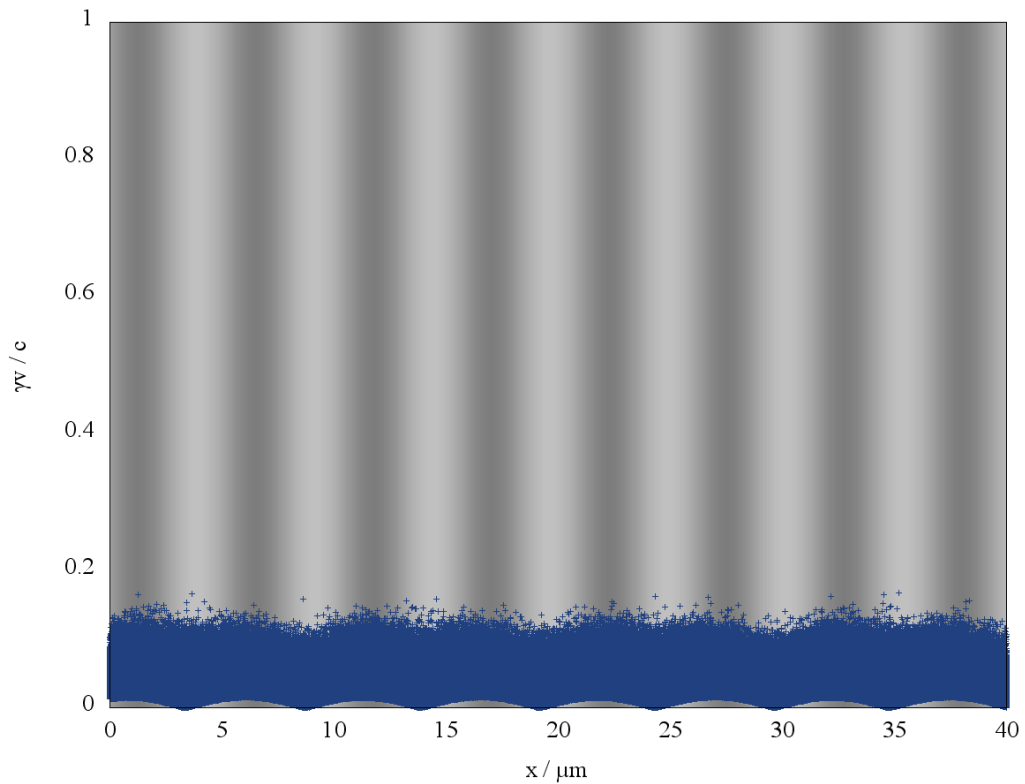


Abbildung 4.3: Schnitt durch den Phasenraum nach 100 Zeitschritten. Im Hintergrund ist der longitudinale Anteil des elektrischen Felds gezeigt. Dabei sind weiße Bereiche im Plot Bereiche mit positiven, beschleunigendem elektrischen Feld. Darüber ist für jedes Makroteilchen ein Punkt in Blau gezeichnet. Man erkennt daß Teilchen mit Geschwindigkeiten bis etwas 10 Prozent der Lichtgeschwindigkeit vorkommen.

Abbildung 4.4 zeigt, wie nach einiger Zeit an mehreren Stellen Teilchen vom beschleunigenden Feld zu immer höheren Energien getrieben werden. Dabei rutschen sie aus der optimalen Phasenlage. In der Abbildung ist dieser Vorgang daran erkennbar, daß die Spitze der Welle, also die energiereichsten Teilchen an der Grenze zwischen weißem (beschleunigenden) und schwarzem (bremsenden) elektrischen Feld ankommen. Wenn die Teilchen dieses Limit erreicht haben, werden sie nicht weiter beschleunigt. Die erreichte Geschwindigkeit ist hier 35 Prozent der Lichtgeschwindigkeit. Der Vorgang, daß die Teilchen die beschleunigende Phase des elektrischen Felds verlassen und die bremsende

Phase erreichen, wird als „Detrapping“ bezeichnet.

4.1.3 Energieverteilung

Neben der Verteilung im Phasenraum ist auch die Energieverteilung interessant. Abbildung 4.5 zeigt ein Histogramm der auftretenden Teilchengeschwindigkeiten nach 100 Zeitschritten. Man sieht eine recht glatte Verteilung bis etwa zehn Prozent der Lichtgeschwindigkeit, die dann sehr scharf endet.

Abbildung 4.6 zeigt das Histogramm zu einem späteren Zeitpunkt. Auffällig im Histogramm nach 4600 Zeitschritten ist außer dem flacheren Abfall bei $0.1 c$ vor allem das Nebenmaximum bei $0.24 c$. Der langsamere Abfall entsteht durch die Zunahme an hochenergetischen Teilchen, die durch Surfatron-Acceleration beschleunigt wurden. Der kleine Peak entsteht dadurch, daß Teilchen bis zur Detrapping-Energie beschleunigt werden, dann aber nicht sofort die Energie wieder verlieren, sondern sich bei vergleichsweise hohen Energien ansammeln.

4.1.4 Auflösungsverbesserung

Man erkennt an Abbildung 4.6 sehr deutlich, daß nur wenige der 4,2 Millionen Elektronen-Makroteilchen es zu hohen Energien schaffen. In jedem Zeitschritt sind nur einige Hundert Teilchen in der Nähe der Detrapping-Energie zu finden. Auf der anderen Seite will man aber gerade an dieser interessanten Stelle genug Teilchen haben, um aussagekräftig Statistik betreiben zu können und Größen wie den Spektralindex bestimmen zu können.

Prinzipiell kann man einfach die Simulationsbox größer machen oder mehr Teilchen pro Elementarzelle verwenden. Beides führt jedoch nur begrenzt zum erwünschten Erfolg. Wenn man die Teilchenzahl verzehnfacht, so landen von den zusätzlichen 72 Millionen Teilchen nur 5000 bis 10000 im interessanten Energiebereich. Dies sind natürlich deutlich mehr als die Teilchen, die gegenwärtig zur Verfügung stehen, aber um den Preis zehnfachen Rechenaufwandes. Ein Großteil der zusätzlichen Teilchen landet bei mittleren Energien und trägt dort nichts wesentliches bei.

Die Idee ist daher, die Auflösung gezielt bei den hohen Energien zu verbessern. Hierzu ermittelt man nach einem Simulationslauf, welche Teilchen hohe Energien erreicht haben. In einem zweiten Durchlauf ersetzt man dann diese Teilchen durch kleinere Makroteilchen, um so die Auflösung bei hohen Energien zu verbessern.

Erste Testläufe in diese Richtung haben gezeigt, daß von diesen kleineren Makroteilchen, die meisten relativ eng beieinander bleiben und zu hohen Energien beschleunigt

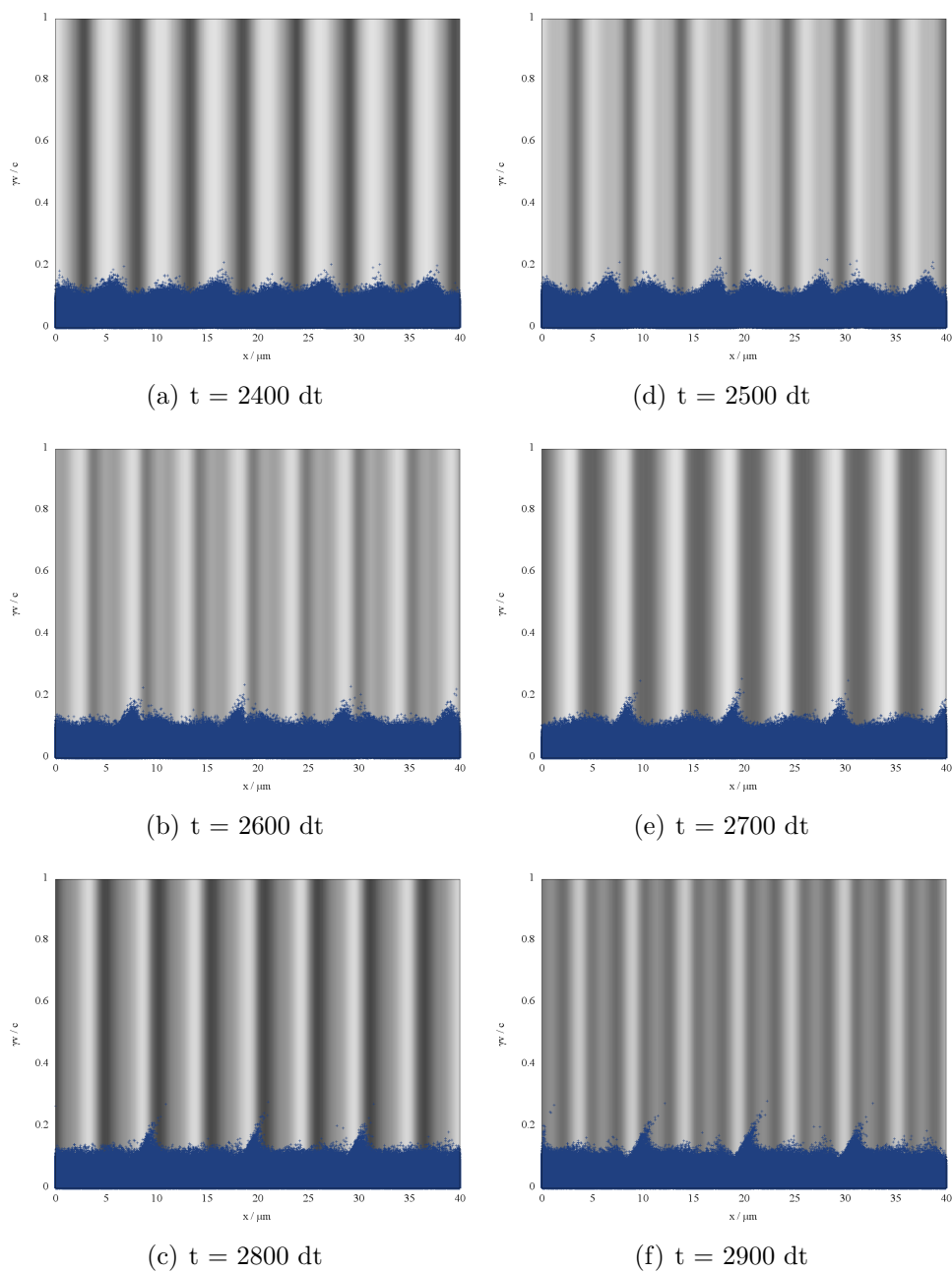


Abbildung 4.4: Aufeinanderfolgende Schnitte durch den Phasenraum analog zu Abbildung 4.3. Man erkennt wie an mehreren Stellen Teilchen vom beschleunigenden Feld zu immer höheren Energien getrieben werden. Dabei rutschen sie aus der optimalen Phasenlage und werden nicht weiter als bis zu 35 Prozent Lichtgeschwindigkeit beschleunigt. Dieser Vorgang wird als Detrapping bezeichnet.

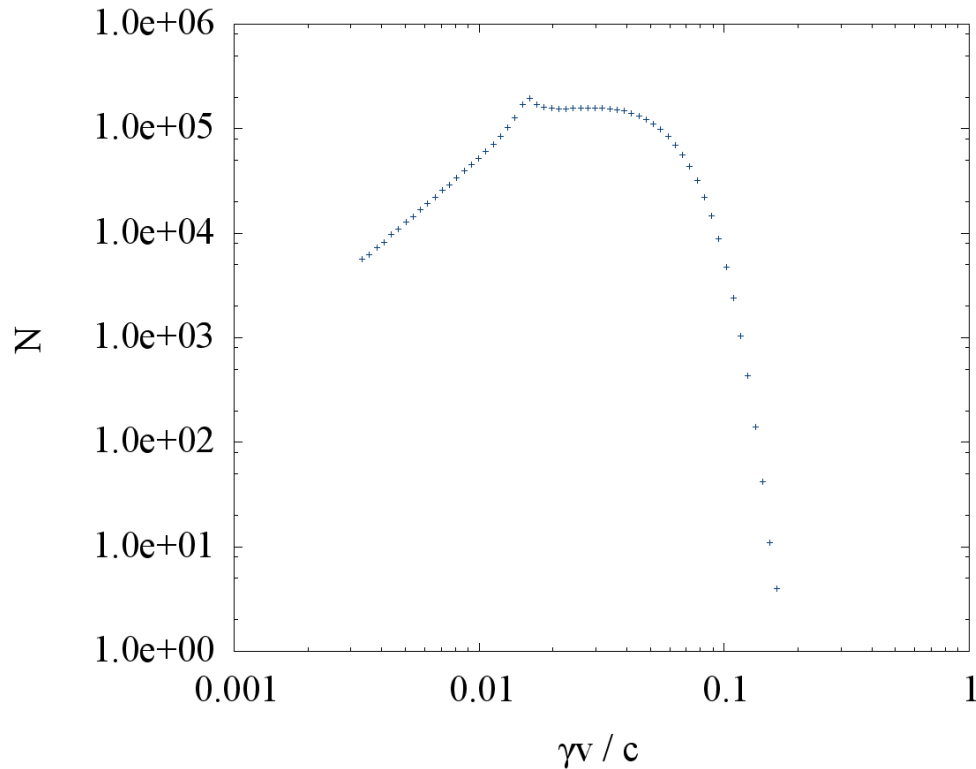


Abbildung 4.5: Teilchenzahl N für einen Energiebereich mit angegebener mittlerer Geschwindigkeit $\gamma v/c$ nach 100 Zeitschritten der Simulation zur Surfatron-Beschleunigung. Insgesamt sind 4,2 Millionen Elektronen-Makroteilchen aufgetragen.

werden. In wie viele kleinere Makroteilchen zerlegt werden muss, und wie stark die Anfangsbedingungen im Phasenraum variiert werden müssen, um einerseits viele Teilchen bei hohen Energien zu erhalten und andererseits hinreichend unkorrelierte Teilchenbahnen zu erhalten, um statistische Aussagen treffen zu können, wird gerade noch untersucht.

4.2 Laser Wakefield Acceleration

4.2.1 Simulationsbedingungen

Die Wahl der Simulationsbedingungen orientiert sich an [54] und [26]. Tsung et al. beschreibt die erste dreidimensionale PIC-Simulation von Laser Wakefield Acceleration, während Geddes et al. das Problem von der experimentellen Seite beleuchtet. Die Pa-

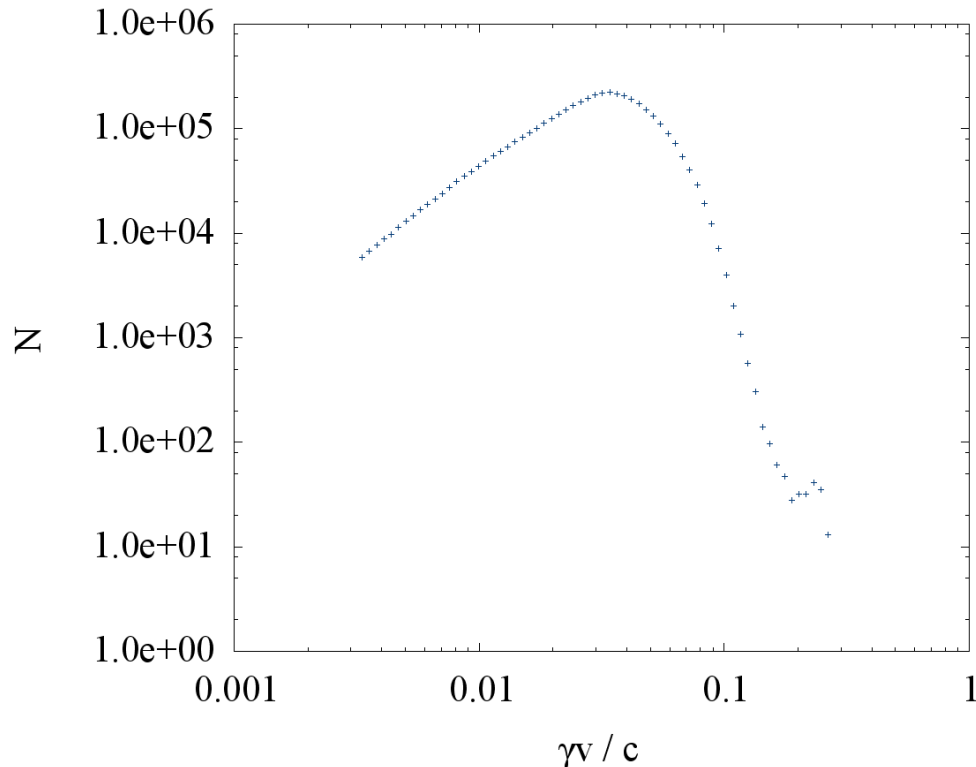


Abbildung 4.6: Verteilung der Teilchen auf Geschwindigkeitsbereich zu $t = 4600dt$. Auffällig ist das Nebenmaximum unterhalb der Detrapping-Energie.

Parametersätze passen nicht ganz zusammen, so ist das Verhältnis von Laserfrequenz zu Plasmafrequenz bei Tsung et al. $\frac{\omega_L}{\omega_P} \approx 34$, während bei Geddes et al. diese Größe $\frac{\omega_L}{\omega_P} \approx 13$ beträgt.

Auch andere wichtige Parameter sind nicht genau bekannt oder unterscheiden sich zwischen unterschiedlichen Papieren. Auf der Suche nach dem korrekten Parametersatz und der richtigen Beschreibung eines Laserpulses (siehe Abschnitt 3.5.2 dazu) wurden 69 Simulationen durchgeführt. Es sind daher nicht alle Parametersätze an diese Diplomarbeit angehängt. Anhang C enthält exemplarisch die Parameter der Simulation, aus der im folgenden Abschnitt Schnittbilder gezeigt werden.

4.2.2 Schnittbilder

Abbildungen 4.8 und 4.9 zeigen die Dichte der Teilchen und eine Komponente des elektrischen Felds. Die Dichte ist in Graustufen gezeichnet, wobei dunkleres Grau höhere Dichte bedeutet. Die Komponente des elektrischen Feldes entlang der z -Achse ist farbig

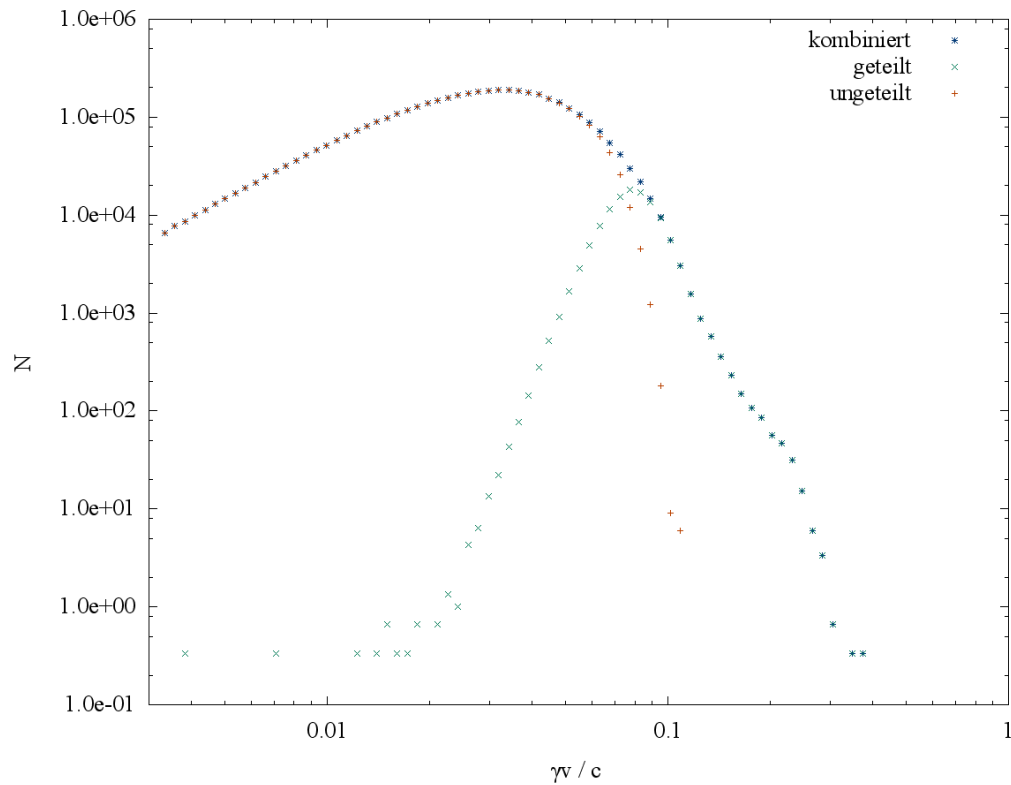


Abbildung 4.7: Verteilung der Teilchengeschwindigkeiten v_{\perp} für ungeteilte und gedrittelte Elektronen-Makroteilchen, sowie die kombinierte Verteilung, analog zur Verteilung in Abbildung 4.6. Um die deutliche Trennung zwischen geteilten und ungeteilten Makroteilchen zu demonstrieren ist abweichend zum vorhergehenden Plot $t = 5500dt$ gezeigt.

dargestellt. Dabei sind gelbe und rote Farbtöne wachsende positive Feldstärken, grüne und blaue Farbtöne negative Feldstärken.

Man erkennt sehr gut den Kanal geringerer Dichte entlang der x -Achse, der den Laserstrahl führt. Abschnitt 1.3.2 erklärt den Hintergrund und die Funktionsweise dieser Anfangsbedingung genauer.

Der Laserpuls wird zum Zeitpunkt $t = 500dt$ gestartet und propagiert durch das Plasma. Dabei werden die leichten Elektronen vom starken elektrischen Feld des Laserpulses beschleunigt. Dadurch entsteht eine Region, in der keine Elektronen mehr vorhanden sind, die sogenannte „Blowout-Region“. Die Elektronen finden sich in einer dünnen Wellenfront hoher Dichte wieder.

Im zeitlichen Verlauf wird diese Blowout-Region größer. Der Kraft des Lasers und der Trägheit der Elektronen steht dabei die elektrostatische Kraft der zurückgebliebenen

Protonen, die vom Laser nicht wesentlich beschleunigt werden, entgegen.

Die Blowout-Region erreicht jedoch die Grenzen der Simulationsbox, bevor der Laserpuls und damit die Front der Plasmawelle, weiter propagiert ist und Teilchenbeschleunigung statt finden konnte.

Versuche mit unterschiedlichen Parametersätzen führen langsam Richtung Teilchenbeschleunigung, da die gezeigte Simulation jedoch fast 9000 Minuten auf 16 CPUs verbraucht hat, ist es sehr schwer und langwierig sich an die korrekten Parameter hinzutasten. Einfach die Simulationsbox größer machen, um Interaktionen mit der Wand zu vermeiden, ist aus dem gleichen Grund nicht möglich.

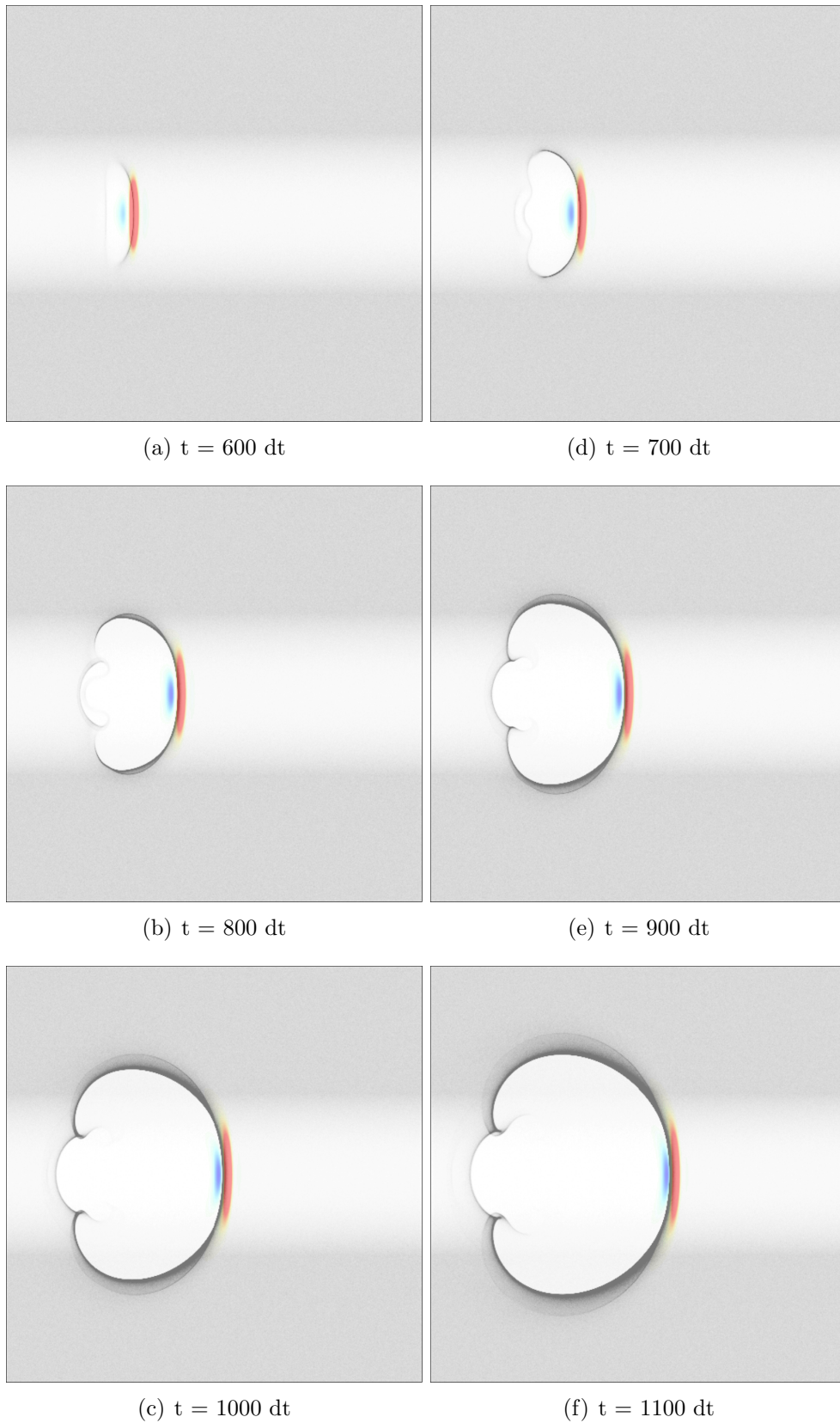


Abbildung 4.8: Nach 500 Zeitschritten um das Plasma einschwingen zu lassen wird der Laserpuls gestartet und propagiert durch den Dichtekanal.

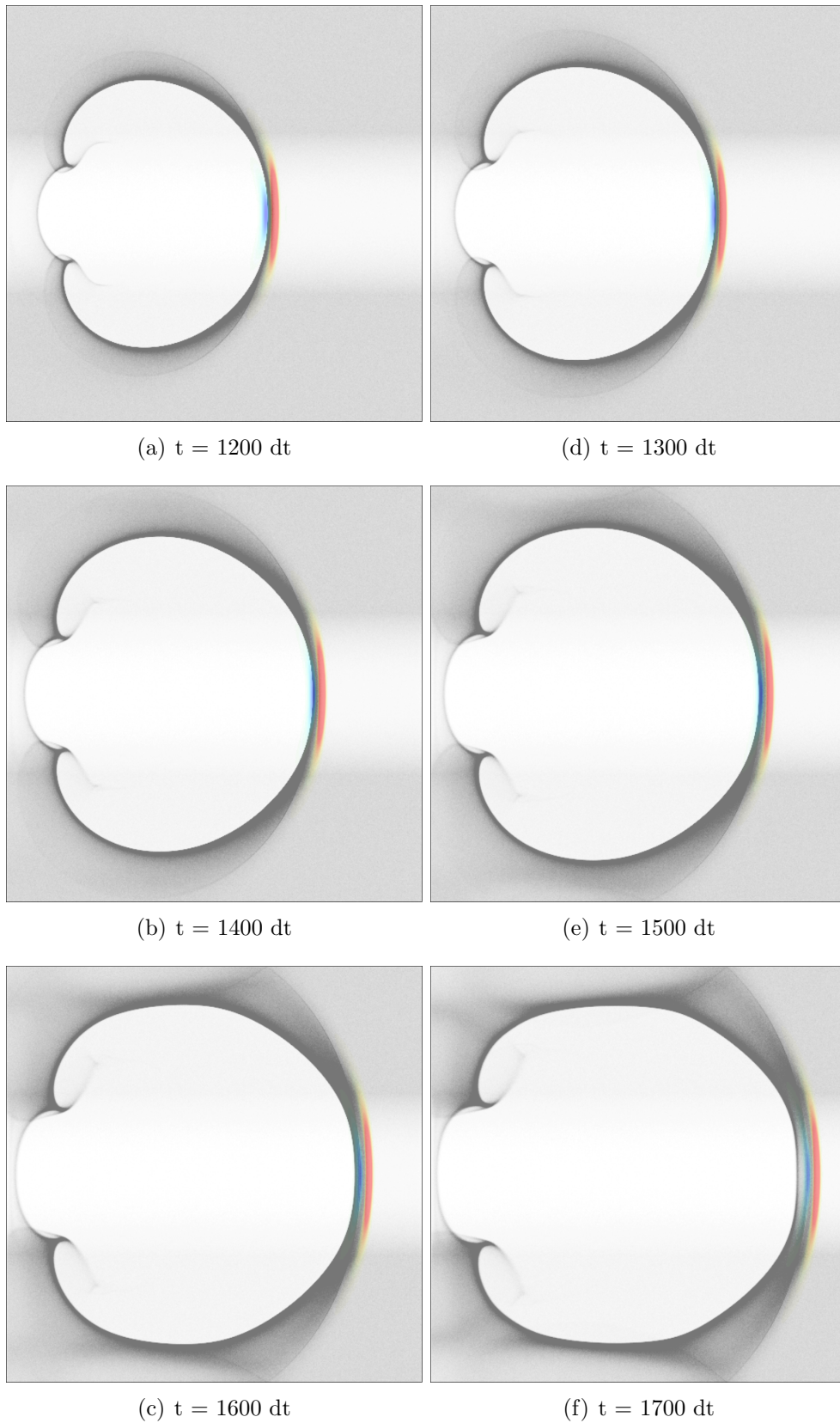


Abbildung 4.9: Anwachsen der Blowout-Region und Vorwärts-Bewegung der Plasmawelle in Abständen von 100 Zeitschritten

5 Zusammenfassung

Nachdem das vorhergehende Kapitel die Ergebnisse einiger repräsentativer Simulationen gezeigt hat, sollen nun hier die Erkenntnisse aus dieser Diplomarbeit kurz zusammengefasst werden. Damit eng verknüpft ist die Überlegung, welche Fragestellungen als nächstes angegangen werden sollten.

Betrachtet man die technischen Aspekte dieser Diplomarbeit, so ist zu allererst festzuhalten, daß der verwendete ACRONYM Code sich bei der Simulation von Laborplasmen bewährt hat, obwohl er ursprünglich für astrophysikalische Probleme entwickelt wurde. Die korrekte Skalierung zu Plasmen mit Dichten, die das zehnfache der sonst simulierten Plasmen aufweisen, sorgt für ein sehr großes Vertrauen in die Korrektheit des Codes und der Aussagen über astrophysikalische Plasmen, die damit gewonnen wurden.

Desweiteren hat sich gezeigt, daß die Code-Struktur Neuerungen wie Laserpulse oder Dichteprofile ermöglicht. Die Herausforderung bei solchen Erweiterungen ist weniger die Interaktion mit dem vorhandenen Code, sondern mehr die Umsetzung von abstrakten mathematischen Konzepten zu korrektem, schnellem und gut parallelisierbarem Code.

Bei den absorbierenden Liao-Randbedingungen kam erschwerend hinzu, daß diese ursprünglich für Erdbebenwellen, die durch eine skalare Funktion beschrieben werden, formuliert sind. Die Umsetzung auf elektrische und magnetische Felder mit jeweils drei Komponenten hat sich hier als herausfordernd erwiesen. Die numerisch praktische, jedoch nicht triviale Staffelung der Feldkomponenten im Raum hat das Unterfangen ebenfalls nicht erleichtert.

Parallel zu den Erweiterungen des vorhandenen Codes wurde die existierende Codebasis kontinuierlich verbessert und wo nötig umstrukturiert, um auch zukünftige Erweiterungen zu ermöglichen. Dabei wurden sowohl die Lesbarkeit, als auch die Performance des PIC-Codes gesteigert.

Der Versuch den vorhandenen PIC-Code auf die Graphikkarte zu portieren hat ebenfalls sehr viel Zeit in Anspruch genommen. Die sehr gute Parallelisierbarkeit des Codes und die vielen parallel arbeitenden Recheneinheiten einer Graphikkarte liessen diesen Versuch sehr erfolgsversprechend erscheinend. Graphikkarten müssen jedoch in einem

fundamental anderem Stil programmiert werden, um ihre volle Leistung entfalten zu können. Zusätzlich unterstützen die gegenwärtig vorhandenen Tools einige verwendete Techniken wie die Blitz-Bibliotheken oder die Vererbungsmöglichkeiten von C++ nicht. Letztenendes wurde der Code für die Graphikkarten also komplett neu geschrieben und per Hand optimiert.

Nach der technischen Seite sollen nun die physikalischen Ergebnisse beleuchtet werden. Die Untersuchung der Surfatron-Beschleunigung funktioniert sehr gut. Die nötigen Ausgangsparameter lassen sich direkt aus der analytischen Behandlung des Problems ableiten und man erhält direkt die erwartete Teilchenbeschleunigung.

Der kleine Anteil an Teilchen, die bis zur Detrapping-Energie beschleunigt werden, begrenzt die Genauigkeit mit der diese Grenzenergie bestimmt werden kann. In diesen Grenzen stimmt sie jedoch sehr gut mit der Vorhersage aus den analytischen Rechnungen überein.

Weitere Untersuchungen mit größeren Teilchenzahlen und die gezielte Verbesserung der Auflösung für hohe Energien werden hier kleinere numerische Unsicherheiten liefern. Um dies mit möglichst kleinem Aufwand an Rechenzeit zu ermöglichen wird derzeit ein „adaptive particle refinement“ implementiert, welches Teilchen bei Überschreiten einer frei wählbaren Energieschwelle automatisch zerteilt.

Auch andere Simulationen, die systematisch den Einfluss des gewählten k -Wertes und der Amplitude der Hybridwelle auf die Effizienz der Teilchenbeschleunigung, die Detrapping-Energie und das resultierende Teilchenspektrum untersuchen, versprechen gute Ergebnisse.

Die Simulation von Laser Wakefield Acceleration funktioniert größtenteils, es mangelt jedoch noch an Simulationen in denen der Laser über ein Vielfaches der Rayleigh-Länge durch das Plasma propagiert und Elektronen beschleunigt. Der Hauptgrund hierfür ist, daß für diesen Prozess die benötigten Parameter nicht genau bekannt sind. Unterschiedliche Quellen machen widersprüchliche Angaben und die analytische Behandlung des Problems ist aufgrund des engen Wechselspiels zwischen Laserpuls und Plasmawelle aussichtslos. Zusätzlich reagiert das System sehr empfindlich auf Änderungen der Parameter, so daß schon eine Änderung der Laserstärke um zehn Prozent ein völlig anderes Simulationsergebnis liefern können.

Hier sind also weitere Untersuchungen nötig, die jedoch viel Rechenzeit verbrauchen und daher nicht im Rahmen dieser Diplomarbeit fertig gestellt werden konnten. Im Rahmen dieser Simulationen sollten auch bessere absorbierende Randbedingungen implementiert werden um Effekte durch die Interaktion des Plasmas mit der Wand auszu-

schließen.

Neben den schon begonnenen Untersuchungen zu Surfatron Acceleration und Laser Wakefield Acceleration sollen in Zukunft auch Fermi I- und Fermi II-Beschleunigung untersucht werden. Diese Prozesse spielen in der Astrophysik eine wichtige Rolle, die Untersuchung mit PIC-Codes steht hier aber noch recht am Anfang.

Der erste nötige Schritt in diese Richtung ist dabei die Bestimmung der nötigen Ausgangskonfiguration. Insbesondere die korrekte Modellierung der Schockwelle und die korrekte Wahl der Magnetfelder stellt hier eine Herausforderung dar. Für die dann folgenden Simulationen werden, genau wie für die Untersuchung der Laser Wakefield Acceleration, aller Voraussicht nach absorbierende Ränder, die Reflexionen der elektromagnetischen Wellen effizient unterdrücken, eine wichtige Rolle spielen.

A Parameter für Dispersionsrelation

cat-File für Dispersionsrelation

```
seed = 123456789          // seed for random number generator

gesamt_zeitschritte = 4000 // do steps
output_zeitschritte = 1   // fields
part_output_zeitschritte = 4000 // particles

nx0 = 1024                // sim box
nx1 = 32
nx2 = 32

space_part_x = 0          // autosplit by MPI
space_part_y = 0
space_part_z = 0

bw = 4.                   // border width
dt = 1                    // autoadjusted anyway
makro = 1e0               // this too
mpzume = 1836             // nature
rescale_dt = 1.001       // stability
rescale_dx = 1

#####
initial = 1                // velocity known
widthbg = 0.1              // sigma_v in anteilten c
widthj = 0                 // no jet
vjetx = 0                  // no bulk velocity
vjety = 0.
vjetz = 0.
vbgx = 0.
```



```
vbgx = 0.
vbgz = 0.
//#####

electronnumberbg = 4           // electron number per cell of the background
electronnumberj = 0           // electron number per cell of the jet
protonnumberbg = 4            // proton number per cell of the background
protonnumberj = 0             // proton number per cell of the jet
positronnumberbg = 0          // positron number per cell of the background
positronnumberj = 0           // positron number per cell of the jet

plasmafreq = 5.64145e13

bordertype_x = 0              // periodic
bordertype_y = 0              // periodic
bordertype_z = 0              // periodic

divB = 1                       // check divB
```

B Parameter für Surfatron-Beschleunigung

cat-File für Surfatron-Beschleunigung

```
seed = 123456789           // seed for random number generator

gesamt_zeitschritte = 10000 // do steps
output_zeitschritte = 100   // fields
part_output_zeitschritte = 100 // particles

nx0 = 1024                 // sim box
nx1 = 32
nx2 = 32

space_part_x = 0          // autosplit by MPI
space_part_y = 0
space_part_z = 0

bw = 4.                   // border width
dt = 1                    // autoadjusted anyway
makro = 1e0               // this too
mpzume = 1836             // nature
rescale_dt = 1.001       // stability
rescale_dx = 1

//#####
initial = 1                // velocity known
widthbg = 0.0217721       // sigma_v in anteilen c
widthj = 0                // no jet
vjetx = 0                 // no bulk velocity
```

```
vjety = 0.
vjetz = 0.
vbgx = 0.
vbgy = 0.
vbgz = 0.
//#####

electronnumberbg = 4           // electron number per cell of the background
electronnumberj = 0           // electron number per cell of the jet
protonnumberbg = 4            // proton number per cell of the background
protonnumberj = 0            // proton number per cell of the jet
positronnumberbg = 0         // positron number per cell of the background
positronnumberj = 0         // positron number per cell of the jet

plasmafreq = 5.64145e13

bordertype_x = 0             // periodic
bordertype_y = 0             // periodic
bordertype_z = 0             // periodic

divB = 1                     // check divB

k_Ex = 8                     // eight waves along nx0
k_Ey = 0
k_Ez = 0

Ex = -45571.7
Ey = -1769.8
Ez = 0
Bx = 0
By = 0
Bz = -2403.6
ux = 1e9
uy = 3.27923e7

deltaN = 0.0453008
```

C Parameter für LWFA

cat-File für LWFA

```
seed = 123456789          // seed for random number generator

gesamt_zeitschritte = 2000 // do steps
output_zeitschritte = 25   // fields
part_output_zeitschritte = 200 // particles
particle_kill_time = 20000 // don't drop particles

nx0 = 1024                // sim box
nx1 = 1024
nx2 = 16

space_part_x = 0          // split only along long axis
space_part_y = 2
space_part_z = 1          // don't split short axis

bw = 4.                   // border width
dt = 1.e-15               // autoadjusted anyway
makro = 1e0               // this too
mpzume = 1836             // nature
rescale_dt = 1.001        // stability
rescale_dx = 1

//#####
initial = 0                // velocity known
widthbg = 0.003           // sigma_v in anteilen c
widthj = 0                 // no jet
vjetx = 0                  // no bulk velocity
vjety = 0.
vjetz = 0.
```

```
vbgx = 0.
vbgy = 0.
vbgz = 0.
//#####

electronnumberbg = 4           // electron number per cell of the background
electronnumberj = 0           // electron number per cell of the jet
protonnumberbg = 4            // proton number per cell of the background
protonnumberj = 0             // proton number per cell of the jet
positronnumberbg = 0          // positron number per cell of the background
positronnumberj = 0           // positron number per cell of the jet

plasmafreq = 3.33e14

bordertype_x = 1              // fixed
bordertype_y = 0              // periodic
bordertype_z = 0              // periodic

laserAmp = 3e9                // Laser strength
laserOmega = 0.1e17           // in 1/s
laserMean = 500               // in dt
laserSigma = 0.1e-15          // in seconds
laserRadius = 200e-7          // in cm
laserFocus = 256              // in dx

keepParticles = 0

density_radius = 200           // channel has radius 200 dx
density_ratio = 0.333          // density in the center of the channel is n/3

divB = 1                      // check divB
```

Literaturverzeichnis

- [1] Das Mikrofeld bei Berücksichtigung der Coulombschen Wechselwirkung zwischen den Störteilchen. Theorie der DEBYE'schen Abschirmung. In: *Mitteilungen der Astronomischen Gesellschaft Hamburg* 13 (1959), p. 29–+
- [2] ASSMANN, R. W. et al.: A 3-TeV e⁺ e⁻ linear collider based on CLIC technology. . – CERN-2000-008
- [3] AUNE, B. ; BANDELMANN, R. ; BLOESS, D. ; BONIN, B. ; BOSOTTI, A. ; CHAMPION, M. ; CRAWFORD, C. ; DEPPE, G. ; DWERSTEG, B. ; EDWARDS, D. A. ; EDWARDS, H. T. ; FERRARIO, M. ; FOUAIDY, M. ; GALL, P.-D. ; GAMP, A. ; GÖSSEL, A. ; GRABER, J. ; HUBERT, D. ; HÜNING, M. ; JUILLARD, M. ; JUNQUERA, T. ; KAISER, H. ; KREPS, G. ; KUCHNIR, M. ; LANGE, R. ; LEENEN, M. ; LIEPE, M.: Superconducting TESLA cavities. In: *Phys. Rev. ST Accel. Beams* 3 (2000), Sep, Nr. 9, p. 092001. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.3.092001>. – DOI 10.1103/PhysRevSTAB.3.092001
- [4] BARTY, C. P. J. ; III, C. L. G. ; LEMOFF, B. E.: Multiterawatt 30-fs Ti:sapphire laser system. In: *Opt. Lett.* 19 (1994), Nr. 18, 1442–1444. <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-19-18-1442>
- [5] BERENGER, J. P.: A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic-Waves. In: *Journal of Computational Physics* 114 (1994), Nr. 2, p. 185–200
- [6] BIRDSALL, C. K. ; LANGDON, A. B.: *Plasma physics via computer simulation*. First. New York: Taylor and Francis, 2005
- [7] BITTENCOURT, J. A.: *Fundamentals of Plasma Physics*. Third. Fundamentals of Plasma Physics, Third Edition by J.A. Bittencourt. Published by Springer-Verlag, New York, Inc.; 2004. ISBN 0-387-20975-1., 2004

- [8] BOOK, D. L. ; WAGNER, L. S. (Hrsg.) ; GOLDSTEIN, J. A. (Hrsg.) ; CHAPMAN, E. A. (Hrsg.): *NRL (Naval Research Laboratory) plasma formulary, revised*. 2007
- [9] BORISOV, A. B. ; BOROVSKIY, A. V. ; SHIRYAEV, O. B. ; KOROBKIN, V. V. ; PROKHOROV, A. M. ; SOLEM, J. C. ; LUK, T. S. ; BOYER, K. ; RHODES, C. K.: Relativistic and charge-displacement self-channeling of intense ultrashort laser pulses in plasmas. In: *Phys. Rev. A* 45 (1992), Apr, Nr. 8, p. 5830–5845. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.45.5830>. – DOI 10.1103/PhysRevA.45.5830
- [10] BOUSSARD, D. ; CHIAVERI, E. ; HAEBEL, E. ; KINDERMANN, H. P. ; LOSITO, R. ; MARQUE, S. ; RODEL, V. ; STIRBET, M.: The LHC superconducting cavities. In: *Proceedings of the 1999 IEEE Particle Accelerator Conference. 29 Mar - 2 Apr 1999, New York, New York. 18th IEEE Particle Accelerator Conference, p.946-948*, 1999, p. 946–948
- [11] BUCK, John A.: *Fundamentals of Optical Fibers*. New-York : John Wiley & Sons, 1995 (Wiley Series in Pure and Applied Optics). – 264 S. – ISBN 0–471–30818–8
- [12] BURKART, T. ; ELBRACHT, O. ; SPANIER, F.: Presentation of simulation results of our 3D PIC Code. In: *Astronomische Nachrichten* 328 (2007), July, p. 662–+
- [13] BURKART, Thomas: *Simulation von Teilchenbeschleunigung durch die Weibel-Instabilität mit Hilfe eines PiC-Codes*, Universität Würzburg, Diplomarbeit, März 2007
- [14] CHEN, F. F.: *Introduction to plasma physics*. New York: Plenum Press, 1974
- [15] CHEW, Weng C. ; WEEDON, William H.: A 3D perfectly matched medium from modified maxwell's equations with stretched coordinates. In: *Microwave and Optical Technology Letters* 7 (1994), Nr. 13, 599–604. <http://dx.doi.org/10.1002/mop.4650071304>. – DOI 10.1002/mop.4650071304
- [16] COHEN, Bruce I. ; LANGDON, A. B. ; HEWETT, Dennis W. ; PROCASSINI, Richard J.: Performance and optimization of direct implicit particle simulation. In: *Journal of Computational Physics* 81 (1989), Nr. 1, 151 - 168. [http://dx.doi.org/DOI:10.1016/0021-9991\(89\)90068-5](http://dx.doi.org/DOI:10.1016/0021-9991(89)90068-5). – DOI DOI: 10.1016/0021-9991(89)90068-5. – ISSN 0021-9991

- [17] COURANT, R. ; FRIEDRICHS, K. ; LEWY, H.: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. In: *Mathematische Annalen* 100 (1928), December, Nr. 1, 32–74. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01448839>. – DOI 10.1007/BF01448839
- [18] DAWSON, John M.: Nonlinear Electron Oscillations in a Cold Plasma. In: *Phys. Rev.* 113 (1959), Jan, Nr. 2, p. 383–387. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.113.383>. – DOI 10.1103/PhysRev.113.383
- [19] DEBYE, Peter ; HÜCKEL, Erich: Zur Theorie der Elektrolyte. I. Gefrierpunktserniedrigung und verwandte Erscheinungen. In: *Physikalische Zeitschrift* 24 (1923), Nr. 185, p. 305
- [20] DOLGASHEV, Valery A. ; TANTAWI, Sami G.: Effect of RF parameters on breakdown limits in high-vacuum X-band structures. In: *AIP Conf. Proc.* 691 (2004), p. 151–165. <http://dx.doi.org/10.1063/1.1635116>. – DOI 10.1063/1.1635116
- [21] ESIRKEPOV, T. Z.: Exact charge conservation scheme for Particle-in-Cell simulation with an arbitrary form-factor. In: *Computer Physics Communications* 135 (2001), Nr. 2, 144 - 153. [http://dx.doi.org/10.1016/S0010-4655\(00\)00228-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0010-4655(00)00228-9). – DOI 10.1016/S0010-4655(00)00228-9. – ISSN 0010-4655
- [22] FARKAS, Z. D.: Increasing SLEDED Linac Gradient. In: *NASA STI/Recon Technical Report N 2* (2001), November, p. 87863–+
- [23] FERMI, ENRICO: On the Origin of the Cosmic Radiation. In: *Phys. Rev.* 75 (1949), Apr, Nr. 8, p. 1169–1174. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.75.1169>. – DOI 10.1103/PhysRev.75.1169
- [24] FONSECA, R. ; SILVA, L. ; TSUNG, F. ; DECYK, V. ; LU, W. ; REN, C. ; MORI, W. ; DENG, S. ; LEE, S. ; KATSOULEAS, T. ; ADAM, J.: OSIRIS: A Three-Dimensional, Fully Relativistic Particle in Cell Code for Modeling Plasma Based Accelerators. Version:2008. <http://dx.doi.org/DOI:10.1007/3-540-47789-6-36>. 2008. – DOI DOI: 10.1007/3-540-47789-6-36, 342–351
- [25] GANSE, Urs: *Typ II Radiobursts bei koronalen Masseauswürfen - Simulation mit PiC-Codes*, Universität Würzburg, Diplomarbeit, März 2009
- [26] GEDDES, C. G. R. ; TOTH, Cs ; TILBORG, J. van ; ESAREY, E. ; SCHROEDER, C. B. ; BRUHWILER, D. ; NIETER, C. ; CARY, J. ; LEEMANS, W. P.: High-quality

- electron beams from a laser wakefield accelerator using plasma-channel guiding. In: *Nature* 431 (2004), September, Nr. 7008, 538–541. <http://dx.doi.org/10.1038/nature02900>. – DOI 10.1038/nature02900
- [27] HEDEDAL, Christian B.: *Gamma-Ray Bursts, Collisionless Shocks and Synthetic Spectra*, University of Copenhagen, PhD thesis, 2005
- [28] HEMKER, Roy G.: *Particle-In-Cell Modeling of Plasma-Based Accelerators in Two and Three Dimensions*, University of California, Los Angeles, PhD thesis, 2000
- [29] HINTERBERGER, Frank: *Physik der Teilchenbeschleuniger und Ionenoptik. 2.* Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2008. – ISBN 3–540–75281–3
- [30] HOCKNEY, R. W. ; EASTWOOD, J. W.: *Computer simulation using particles*. Bristol: Hilger, 1988, 1988
- [31] IVASCENKO, Alex: *Beschleunigung und Transport hochenergetischer Elektronen in elliptischen Galaxien*, Universität Würzburg, Diplomarbeit, April 2009
- [32] JONES, F. C.: A theoretical review of diffusive shock acceleration. In: *Astrophysical Journal Supplement Series* 90 (1994), Februar, p. 561–565. <http://dx.doi.org/10.1086/191875>. – DOI 10.1086/191875
- [33] KATSOULEAS, T. ; DAWSON, J. M.: A Plasma Wave Accelerator – Surfatron I. In: *IEEE Transactions on Nuclear Science* 30 (1983), August, p. 3241–+. <http://dx.doi.org/10.1109/TNS.1983.4336628>. – DOI 10.1109/TNS.1983.4336628
- [34] KATSOULEAS, T. ; MORI, W. B.: Wave-Breaking Amplitude of Relativistic Oscillations in a Thermal Plasma. In: *Phys. Rev. Lett.* 61 (1988), Jul, Nr. 1, p. 90–93. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.61.90>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.61.90
- [35] LANDAU, L. D. ; LIFSCHITZ, E. M.: *Hydrodynamik. 5.* Akademie Verlag, 1991
- [36] LAPENTA, Giovanni ; BRACKBILL, J. U. ; RICCI, Paolo: Kinetic approach to microscopic-macroscopic coupling in space and laboratory plasmas. In: *Physics of Plasmas* 13 (2006), Nr. 5, 055904. <http://dx.doi.org/10.1063/1.2173623>. – DOI 10.1063/1.2173623
- [37] LIAO, Z. P. ; WONG, H. L. ; YANG, B. P. ; YUAN, Y. F.: A transmitting boundary for transient wave analyses. In: *Scientia Sinica (series A)* 17 (1984), p. 1063 – 1076

- [38] MAIMAN, T. H.: Optical and Microwave-Optical Experiments in Ruby. In: *Phys. Rev. Lett.* 4 (1960), Jun, Nr. 11, p. 564–566. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.4.564>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.4.564
- [39] McCLEMENTS, K. G. ; DIECKMANN, M. E. ; YNNERMAN, A. ; CHAPMAN, S. C. ; DENDY, R. O.: Surfatron and Stochastic Acceleration of Electrons at Supernova Remnant Shocks. In: *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001), Nov, Nr. 25, p. 255002. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.255002>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.87.255002
- [40] McDONALD, K. T.: Axicon Gaussian Laser Beams. In: *ArXiv Physics e-prints* (2000), März. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2000physics...3056M>
- [41] MELROSE, D. B.: *Instabilities in Space and Laboratory Plasmas*. Instabilities in Space and Laboratory Plasmas, by D. B. Melrose, pp. 288. ISBN 0521305411. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1986
- [42] MODENA, A. ; NAJMUDIN, Z. ; DANGOR, A. E. ; CLAYTON, C. E. ; MARSH, K. A. ; JOSHI, C. ; MALKA, V. ; DARROW, C. B. ; DANSON, C. ; NEELY, D. ; WALSH, F. N.: Electron acceleration from the breaking of relativistic plasma waves. In: *Nature* 377, p. 606 – 608. <http://dx.doi.org/10.1038/377606a0>. – DOI 10.1038/377606a0
- [43] NAKAJIMA, K. ; FISHER, D. ; KAWAKUBO, T. ; NAKANISHI, H. ; OGATA, A. ; KATO, Y. ; KITAGAWA, Y. ; KODAMA, R. ; MIMA, K. ; SHIRAGA, H. ; SUZUKI, K. ; YAMAKAWA, K. ; ZHANG, T. ; SAKAWA, Y. ; SHOJI, T. ; NISHIDA, Y. ; YUGAMI, N. ; DOWNER, M. ; TAJIMA, T.: Observation of Ultrahigh Gradient Electron Acceleration by a Self-Modulated Intense Short Laser Pulse. In: *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995), May, Nr. 22, p. 4428–4431. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.4428>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.74.4428
- [44] PENN, G. ; STOLTZ, P. H. ; CARY, J. R. ; WURTELE, J.: Boris push with spatial stepping. In: *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 29 (2003), Nr. 8, 1719–1722. <http://stacks.iop.org/0954-3899/29/1719>
- [45] PRESS, W. H. ; TEUKOLSKY, S. A. ; VETTERLING, W. T. ; FLANNERY, B. P.: *Numerical recipes in C. The art of scientific computing*. Second. Cambridge: University Press, 1992
- [46] PROTHEROE, Ray J. ; CLAY, R. W.: Ultra high energy cosmic rays. In: *Publ. Astron. Soc. Pac.* 21 (2004), 1–22. <http://fr.arxiv.org/abs/astro-ph/0311466>

- [47] SAHA, Megh n.: In: *Phil. Mag.* 41 (1920), p. 267
- [48] SAHA, Megh n.: Versuch einer Theorie der physikalischen Erscheinungen bei hohen Temperaturen mit Anwendung auf die Astrophysik. In: *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei* 6 (1921), Dez, Nr. 1, p. 40–55. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01327962>. – DOI 10.1007/BF01327962
- [49] SUN, Guo-Zheng ; OTT, Edward ; LEE, Y. C. ; GUZDAR, Parvez: Self-focusing of short intense pulses in plasmas. In: *Physics of Fluids* 30 (1987), Nr. 2, 526-532. <http://dx.doi.org/10.1063/1.866349>. – DOI 10.1063/1.866349
- [50] TAFLOVE, Allan ; HAGNESS, Susan C.: *Computational Electrodynamics: The Finite-Differences Time-Domain Method*. 2. Boston, London : Artech House, Inc., 2000. – ISBN 1-58053-076-1
- [51] TAJIMA, T. ; DAWSON, J. M.: Laser Electron Accelerator. In: *Phys. Rev. Lett.* 43 (1979), Jul, Nr. 4, p. 267–270. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.43.267>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.43.267
- [52] TONKS, Lewi ; LANGMUIR, Irving: Oscillations in Ionized Gases. In: *Phys. Rev.* 33 (1929), Feb, Nr. 2, p. 195–210. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.33.195>. – DOI 10.1103/PhysRev.33.195
- [53] TOTH, Cs. ; TILBORG, J. van ; GEDDES, C.G.R. ; FUBIANI, G. ; SCHROEDER, C.B. ; ESAREY, E. ; FAURE, J. ; DUGAN, G. ; LEEMANS, W.P.: Powerful pulsed THz radiation from laser-accelerated relativistic electron bunches. In: *Proceedings SPIE* 5448 LBNL-57055, 2004, p. 491–504
- [54] TSUNG, F. S. ; NARANG, Ritesh ; MORI, W. B. ; JOSHI, C. ; FONSECA, R. A. ; SILVA, L. O.: Near-GeV-Energy Laser-Wakefield Acceleration of Self-Injected Electrons in a Centimeter-Scale Plasma Channel. In: *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004), Oct, Nr. 18, p. 185002. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.185002>. – DOI 10.1103/PhysRevLett.93.185002
- [55] TZOUFRAS, M. ; FONSECA, R.: A 3D PIC simulation study of lwfa for 50fs lasers: 5-1000tw. In: *APS Meeting Abstracts* (2005), Oktober, p. 1073P–+
- [56] VERDEYEN, Joseph T.: *Laser electronics*. Englewood Cliffs, NJ, USA : Prentice-Hall, Inc., 1981. – ISBN 0-13-523738-6

- [57] YEE, Kane: Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. In: *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on* 14 (1966), May, Nr. 3, p. 302–307. – ISSN 0018–926X

Danksagung

Zu allererst möchte mich bei Professor Dr. Karl Mannheim und Dr. Felix Spanier für die Möglichkeit dieses Thema zu bearbeiten und die Betreuung während der Diplomarbeit bedanken.

Ein großes Dankeschön geht an Thomas Burkart und Urs Ganse für den funktionierenden PIC-Code, auf den ich aufbauen konnte und die vielen fruchtbaren Diskussionen und guten Ratschläge.

Den Korrekturlesenden vielen Dank für das Aufspüren unzähliger Rechtschreib- und Grammatikfehler sowie der unvermeidlichen Layoutschwächen. Alle verbliebenen Fehler sind alleine meine Schuld.

Als letztes möchte ich mich bei meinen Eltern und meiner Freundin bedanken, dafür daß sie mich während Studium und Diplomarbeit ertragen und unterstützt haben.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit ohne unerlaubte fremde Hilfe angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen verwendet habe.

Würzburg, 17. Februar 2010

Patrick Kilian